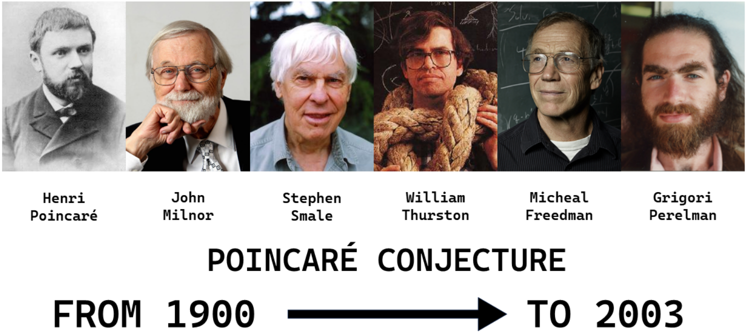
Poincaré 猜想的发展历程

徐敬浩

2025 年 5 月 22 日



Outline

2 维的闭流形

定理 (闭曲面分类定理)

2 维流形的同胚型只有 S^2, nT^2 和 $m\mathbb{R}\mathbb{P}^2$,

其中
$$\begin{aligned}\pi_1(S^2) &= 0,\\ \widetilde{\pi_1}(nT^2) &= \bigoplus_{2n}\mathbb{Z},\\ \widetilde{\pi_1}(m\mathbb{R}\mathbb{P}^2) &= \bigoplus_{m-1}\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2\end{aligned}$$

2 维的闭流形

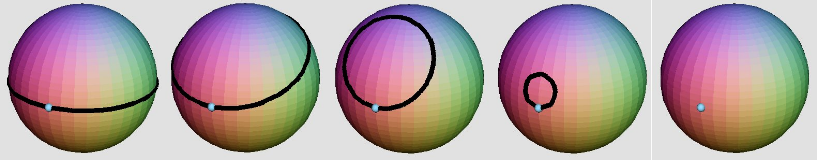
定理 (闭曲面分类定理)

2 维流形的同胚型只有 S^2, nT^2 和 $m\mathbb{RP}^2$,

其中
$$\begin{aligned} \pi_1(S^2) &= 0, \\ \widetilde{\pi_1}(nT^2) &= \bigoplus_{2n} \mathbb{Z}, \\ \widetilde{\pi_1}(m\mathbb{RP}^2) &= \bigoplus_{m-1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

单连通的闭曲面只有 S^2,

甚至同调球也只有 S^2!!



Poincaré 的猜想

庞加莱最初的错误猜想：

猜想 (错误的 Poincaré 猜想 (1900))

若一个 3 维流形的同调群与 S^3 相同，那么它是单连通的，进而同胚于 S^3.

图 1: Henri Poincaré

Poincaré 的猜想

庞加莱最初的错误猜想:

猜想 (错误的 Poincaré 猜想 (1900))

若一个 3 维流形的同调群与 S^3 相同, 那么它是单连通的, 进而同胚于 S^3.

反例: Poincaré 同调球 (1904)

Poincaré 同调球 P 是 3 维流形, 满足 $H_*(P) = H_*(S^3)$, 但 $|\pi_1(P)| = 120$, 不单连通.

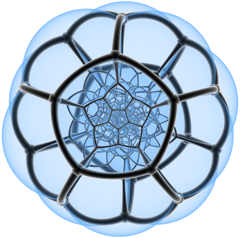
图 1: Henri Poincaré

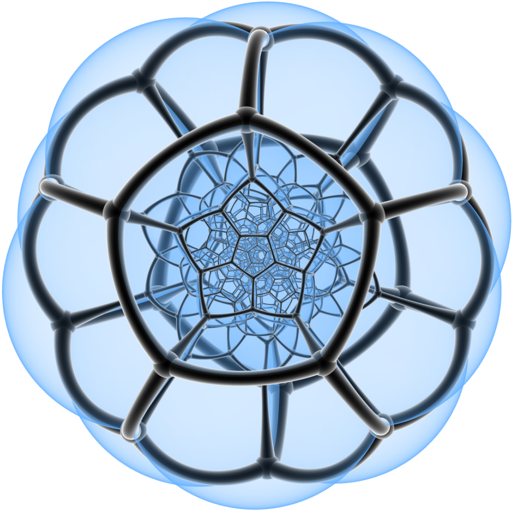
Poincaré 同调球

我们知道正 20 面体对称群 $I \subseteq SO(3)$,
而球面 $S^3 \cong SU(2) \xrightarrow{\pi} SO(3)$ 是二重覆叠, $2I := \pi^{-1}I \subset SU(2)$
称为 **"2 元 20 面体群"** 是 120 阶群, 且 $[2I, 2I] = 2I$, 即完美群!

定义 (Poincare 同调球)

$2I$ 在 $S^3 \cong SU(2)$ 上的作用为自由作用, 故可作商流形
$P^3 = S^3/2I$, 可知 $\pi_1(P^3) \cong 2I$, 故 $H_1(P) = \widetilde{\pi_1}(P) = 0$, P 称为
Poincaré 同调球.





图示 S^3 的 120 面体胞腔填充,$2I$ 在这 **120 个胞腔**上的作用是自由、可迁的, 可视作 Poincaré 同调球 P 的万有覆叠空间.

庞加莱最初的错误猜想:

猜想 (错误的 Poincaré 猜想 (1900))

若一个 3 维流形的同调群与 S^3 相同, 那么它是单连通的, 进而同胚于 S^3.

反例: Poincaré 同调球 (1904)

Poincaré 同调球 P 是 3 维流形, 满足 $H_*(P) = H_*(S^3)$, 但 $|\pi_1(P)| = 120$, 不单连通.

Henri Poincaré

保留原始猜想的后半句, 即正确猜想:

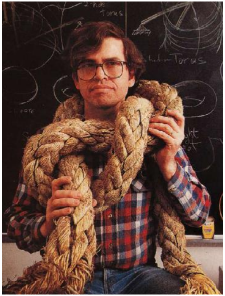
猜想 (Poincaré 猜想 (1904))

设 M 是一个闭的三维流形. 若 M 是单连通的, 则 M 同胚于 S^3.

从 Thurston 到 Perelman

几何化猜想 (Thurston)

任何三维闭流形均可沿 2 维环面分解成若干块，每块可赋予八种几何结构之一.



William Thurston

Perelman(2003): 使用 **Ricci flow** 证明, Thurston 的几何化猜想正确!

推论 (Poincaré 猜想)

由于单连通的 3 维闭流形所属的分类只能是**球面几何模型** $\mathbb{S}^3$ 的, 因此它的万有覆叠空间是 S^3, 又由于单连通, 只能同胚于 S^3.

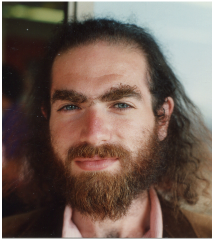
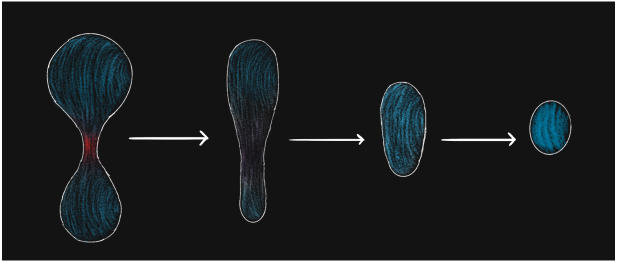


图 2: Grigori Perelman



广义 Poincaré 猜想

一个世纪以来,Poincaré 猜想悬而未决. 人们转而研究它在其它维数的类比, 即广义 Poincaré 猜想.

猜想 (广义 Poincaré 猜想)

设 M 是闭的 n 维流形, 若 M 同伦等价于 S^n, 则 M 同胚于 S^n.

广义 Poincaré 猜想

一个世纪以来,Poincaré 猜想悬而未决. 人们转而研究它在其它维数的类比, 即广义 Poincaré 猜想.

猜想 (广义 Poincaré 猜想)

设 M 是闭的 n 维流形, 若 M 同伦等价于 S^n, 则 M 同胚于 S^n.

注意:

1. 2 维同伦球就是 S^2
2. 闭流形 M^3 是同伦球 $\Longleftrightarrow$ M^3 单连通
3. $n \geqslant 4$ 时 “同伦球” 条件强于单连通!

$n = 3$ 时的等价性证明

定理

M^3 是闭的三维流形，则 M 是单连通的 $\Longleftrightarrow$ M 同伦等价于 S^3.

证明.

$\Leftarrow$: $\pi_1(M) = \pi_1(S^3) = 0$, 故 M 单连通；
$\Rightarrow$: 若 M 单连通，则它的连通定向覆盖是平凡覆盖，也就是说 M 为定向流形，故 $H_3(M) = 0$; 另外由于 $H_1(M)$ 是 $\pi_1(M)$ 的交换化，故 $\pi_1(M) = 0$ 推出 $H_1(M) = 0$，再由万有系数定理，$H^1(M) = 0$, 再由 Poincaré 对偶,$H_2(M) \cong H^1(M) = 0$, 再由 Hurewicz 定理，$\pi_2(M) \cong H_2(M) = 0$, 进而 $\pi_3(M) \cong H_3(M) \cong \mathbb{Z}$. 这意味着 $\pi_3(M)$ 的一个生成元可以由映射度为 1 的映射 $S^3 \to M$ 决定，诱导了 H_3 与 π_3 的同构. 进而存在一个由 S^3 到 M 的单连通单纯复形的映射，诱导了所有同调群的同构，再由 Whitehead 定理，可知这个映射是同伦等价的. □

广义 Poincaré 猜想的解决历程

1. $n=1$ 时，正确，因为闭曲线一定同胚于 S^1；
2. $n=2$ 时，正确，由闭曲面分类定理，单连通的闭曲面一定是 S^2；

广义 Poincaré 猜想的解决历程

1. $n = 1$ 时，正确，因为闭曲线一定同胚于 S^1；
2. $n = 2$ 时，正确，由闭曲面分类定理，单连通的闭曲面一定是 S^2；
3. $n \geqslant 5$ 时，正确，1962 年，Smale 提出的 h-配边理论可以给出 $n \geqslant 6$ 的证明，但 $n = 5$ 的证明应该是 Newman 在 1966 年首次提出的；

广义 Poincaré 猜想的解决历程

1. $n = 1$ 时，正确，因为闭曲线一定同胚于 S^1；
2. $n = 2$ 时，正确，由闭曲面分类定理，单连通的闭曲面一定是 S^2；
3. $n \geqslant 5$ 时，正确，1962 年，Smale 提出的 h-配边理论可以给出 $n \geqslant 6$ 的证明，但 $n = 5$ 的证明应该是 Newman 在 1966 年首次提出的；
4. $n = 4$ 时，正确，1982 年，Freedman 证明了 4 维流形的拓扑 h-配边定理，进而证明了单连通 4 维流形的分类定理，最后推出了 4 维的 Poincaré 猜想；

广义 Poincaré 猜想的解决历程

1. $n = 1$ 时，正确，因为闭曲线一定同胚于 S^1；
2. $n = 2$ 时，正确，由闭曲面分类定理，单连通的闭曲面一定是 S^2；
3. $n \geqslant 5$ 时，正确，1962 年，Smale 提出的 h-配边理论可以给出 $n \geqslant 6$ 的证明，但 $n = 5$ 的证明应该是 Newman 在 1966 年首次提出的;
4. $n = 4$ 时，正确，1982 年，Freedman 证明了 4 维流形的拓扑 h-配边定理，进而证明了单连通 4 维流形的分类定理，最后推出了 4 维的 Poincaré 猜想；
5. $n = 3$ 时，正确,2003 年，Perelman 利用 Ricci flow 证明了 Thurston 的几何化猜想 (即任何三维闭流形均可沿二维环面分解成若干块，每块可赋予八种几何结构之一； 而单连通的闭流形只能具有球面几何，即 S^3)，从而解决了 Poincaré 猜想.

$n \geqslant 5$ 时的广义猜想

定义 (h(同伦)-配边 (cobordism))

若 W 是紧的带边流形,$\partial W = V_0 \sqcup V_1$, 且 V_0, V_1 都是闭的嵌入子流形, 则称 W 是 V_0 和 V_1 之间的配边;
若嵌入映射 ι_0, ι_1 都是同伦等价, 则称 W 是 h-配边.

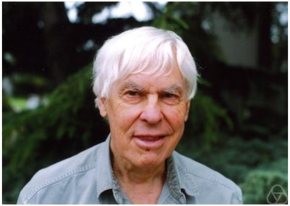


图 3: Stephen Smale

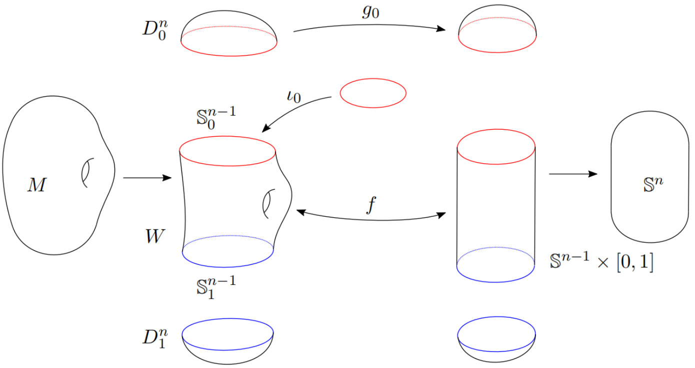
h-配边定理 (Smale 1962)

$n \geqslant 5$, 若 $n+1$ 维带边流形 W 是**单连通** n 维闭流形 V_0 和 V_1 之间的 h-配边, 那么 $W \cong V_0 \times [0,1]$

$n \geqslant 5$ 时的广义猜想

推论

$n \geqslant 6$ 的广义 Poincaré 猜想正确, 即若 M^n 同伦等价于 S^n, 则必同胚于 S^n.



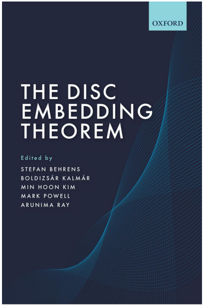
Freedman 的工作与 $n=4$ 的广义猜想

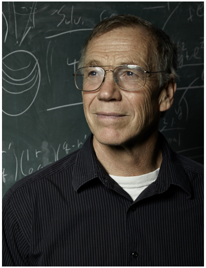
定理 (Freedman 1982)

4 维的拓扑 h-配边定理正确.

推论

5 维的广义 Poincaré 猜想正确.



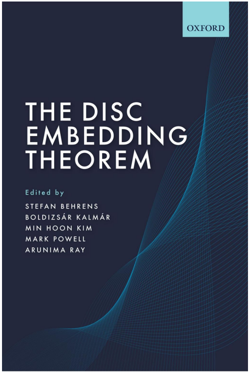


Micheal Freedman

4 维单连通闭流形的分类定理 (Freedman 1982)

4 维单连通闭流形可以按相交形式 Q 实现分类，即：

1. 若 Q 是偶型非退化整二次型，则存在同胚意义下唯一的单连通的 4 维流形，它的相交形式是 Q；
2. 若 Q 是奇型非退化整二次型，则存在两个以 Q 为相交形式的同胚型，且至多一个可光滑化.



推论 (4 维的广义 Poincaré 猜想)

对于 4 维同伦球 M，$H^2(M)=0$，故 2 维的对偶配对恒为 0，相交形式 Q_M 为偶形式，因此 M 与 S^4 的同胚型相同.

更多范畴下的广义 Poincaré 猜想

- Top 为拓扑流形的范畴
- $\mathrm{P.L.}$ 为分片线性 (P.L.) 流形的范畴
- Diff 为光滑流形的范畴

$$\mathrm{Top} \supsetneq \mathrm{P.L.} \supsetneq \mathrm{Diff}$$

更多范畴下的广义 Poincaré 猜想

- Top 为拓扑流形的范畴
- P.L. 为分片线性 (P.L.) 流形的范畴
- Diff 为光滑流形的范畴

$$\text{Top} \supsetneq \text{P.L.} \supsetneq \text{Diff}$$

猜想 (P.L. Poincaré 猜想)

设 M 是闭的 n 维 ***P.L.****(Piecewise Linear, 分片线性)* 流形, 若 M 同伦等价于 S^n, 则 M ***P.L.*** 同胚于 S^n.

猜想 (光滑 Poincaré 猜想)

设 M 是闭的 n 维**光滑**流形, 若 M 同伦等价于 S^n, 则 M 微分同胚于赋予标准**光滑**结构的 S^n.

光滑 Poincaré 猜想

猜想 (光滑 Poincaré 猜想)

设 M 是闭的 n 维光滑流形, 若 M 同伦等价于 S^n, 则 M 微分同胚于赋予标准光滑结构的 S^n.

光滑 Poincaré 猜想

猜想 (光滑 Poincaré 猜想)

设 M 是闭的 n 维光滑流形, 若 M 同伦等价于 S^n, 则 M 微分同胚于赋予标准光滑结构的 S^n.

定理 (Moise 1952)

$n \leqslant 3$ 时, n 维拓扑流形存在唯一的光滑结构.

$n \leqslant 3$ 时, 拓扑同胚等价于光滑同胚, 也就是说 $n \leqslant 3$ 的拓扑 Poincaré 猜想与光滑 Poincaré 猜想等价.

光滑 Poincaré 猜想

猜想 (光滑 Poincaré 猜想)

设 M 是闭的 n 维光滑流形, 若 M 同伦等价于 S^n, 则 M 微分同胚于赋予标准光滑结构的 S^n.

定理 (Moise 1952)

$n \leqslant 3$ 时, n 维拓扑流形存在唯一的光滑结构.

$n \leqslant 3$ 时, 拓扑同胚等价于光滑同胚, 也就是说 $n \leqslant 3$ 的拓扑 Poincaré 猜想与光滑 Poincaré 猜想等价.

定理 (Milnor 1956)

S^7 存在怪异 *(exotic)* 的光滑结构. 即 *7* 维光滑 *Poincaré* 猜想错误.

猜想 (光滑 Poincaré 猜想的另一种表述)

设 M 是闭的 n 维光滑流形, 若 M 同胚于 S^n, 则 M 微分同胚于 S^n 的标准微分结构, 也就是说不存在 n 维怪球.

猜想 (光滑 Poincaré 猜想的另一种表述)

设 M 是闭的 n 维光滑流形, 若 M 同胚于 S^n, 则 M 微分同胚于 S^n 的标准微分结构, 也就是说不存在 n 维怪球.

定理 (王国祯, 徐宙立 2017)

不存在 *61* 维怪球, 且 *61* 是最后一个不存在怪球的**奇数**维.

偶数有超过一半的维数被证明存在怪球; 剩余的偶数维人们也猜想是存在的.

猜想 (光滑 Poincaré 猜想的另一种表述)

设 M 是闭的 n 维光滑流形, 若 M 同胚于 S^n, 则 M 微分同胚于 S^n 的标准微分结构, 也就是说不存在 n 维怪球.

定理 (王国祯, 徐宙立 2017)

不存在 *61* 维怪球, 且 *61* 是最后一个不存在怪球的**奇数**维.

偶数有超过一半的维数被证明存在怪球; 剩余的偶数维人们也猜想是存在的.

猜想

> 4 维的球面中, 有唯一光滑结构的只有 S^5, S^6, S^{12}, S^{56}, S^{61}.

猜想 (光滑 Poincaré 猜想的另一种表述)

设 M 是闭的 n 维光滑流形，若 M 同胚于 S^n，则 M 微分同胚于 S^n 的标准微分结构，也就是说不存在 n 维怪球.

定理 (王国祯, 徐宙立 2017)

不存在 *61* 维怪球，且 *61* 是最后一个不存在怪球的**奇数**维.

偶数有超过一半的维数被证明存在怪球；剩余的偶数维人们也猜想是存在的.

猜想

> 4 维的球面中，有唯一光滑结构的只有 S^5, S^6, S^{12}, S^{56}, S^{61}.

猜想 (Very Hard)

存在 4 维怪球.

P.L. Poincaré 猜想

猜想 (P.L. Poincaré 猜想)

设 M 是闭的 n 维 *P.L.(Piecewise Linear, 分片线性)* 流形, 若 M 同伦等价于 S^n, 则 M *P.L.* 同胚于 S^n.

1. $n \geqslant 5$(Smale 1962) 正确, 用 h-配边定理的方法;
2. $n \leqslant 3$ 正确, 此时流形的拓扑、光滑、P.L. 结构均等价;
3. $n = 4$ 未解决.

P.L. Poincaré 猜想

猜想 (P.L. Poincaré 猜想)

设 M 是闭的 n 维 *P.L.(Piecewise Linear, 分片线性)* 流形, 若 M 同伦等价于 S^n, 则 M *P.L.* 同胚于 S^n.

1. $n \geqslant 5$(Smale 1962) 正确, 用 h-配边定理的方法;
2. $n \leqslant 3$ 正确, 此时流形的拓扑、光滑、P.L. 结构均等价;
3. $n = 4$ 未解决.

由于 $n \leqslant 6$ 时光滑结构与 P.L. 结构等价, 4 维的 P.L. Poincaré 猜想就相当于 4 维怪球的存在性问题.

推论

4 维 P.L.Poincaré 猜想正确 $\iff$ 4 维光滑 Poincaré 猜想正确
$\iff$ S^4 不存在怪异光滑结构.

总结

现在 Poincaré 猜想本质上只剩一部分偶数维 (尤其是 4) 怪球的问题还没解决了:

表 1: 各种 Poincaré 猜想的解决情况

范畴	解决状况
拓扑	各维数均正确
P.L.	除 $n = 4$ 未解决外, 其余维数均正确
光滑	$n = 1, 2, 3, 5, 6, 12, 56, 61$ 正确, 其余奇数维均错误, 超过一半的偶数维错误, 还有少于一半的偶数维未解决 (尤其是 4)

总结一下与 Poincaré 猜想相关的五枚菲尔兹奖章, 它们依次由 Milnor、Smale、Thurston、Freedman、Perelman 获得:

表 2: 与 Poincaré 猜想相关的菲尔兹奖

数学家	获奖年份	成果
John Milnor	1962	7 维怪球 (7 维光滑 Poincaré 猜想)
Stephen Smale	1966	$n \geqslant 5$ 的广义 (P.L.)Poincaré 猜想
William Thurston	1982	几何化猜想（关于三维流形的系列成果）
Michael Freedman	1986	$n = 4$ 的广义 Poincaré 猜想
Grigori Perelman	2006	(狭义)Poincaré 猜想