基于三角剖分猜想探究不同范畴内的流形结构

陈以恒　徐敬浩　王思帆

导师: 葛剑

2025 年 5 月 8 日

目录

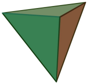
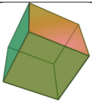
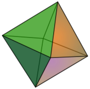
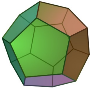
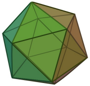
从多面体的欧拉公式讲起

图: **一个球面** S^2

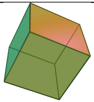
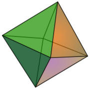
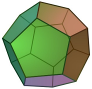
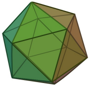
从多面体的欧拉公式讲起

从多面体的欧拉公式讲起

$\rightarrow$

剖分方式					
点的个数 V (0 维胞腔数)	4	8	6	20	12
棱的个数 E (1 维胞腔数)	6	12	12	30	30
面的个数 F (2 维胞腔数)	4	6	8	12	20

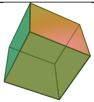
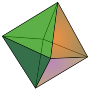
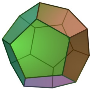
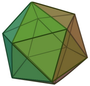
从多面体的欧拉公式讲起

剖分方式					
点的个数 V (0 维胞腔数)	4	8	6	20	12
棱的个数 E (1 维胞腔数)	6	12	12	30	30
面的个数 F (2 维胞腔数)	4	6	8	12	20

规律： $\chi := V - E + F \equiv 2$，$\chi$ 称为 "Euler 示性数"

从多面体的欧拉公式讲起

→

剖分方式					
点的个数 V (0 维胞腔数)	4	8	6	20	12
棱的个数 E (1 维胞腔数)	6	12	12	30	30
面的个数 F (2 维胞腔数)	4	6	8	12	20

规律： $\chi := V - E + F \equiv 2$，$\chi$ 称为 “Euler 示性数”

观察 1： S^2 上存在很多种三角剖分方式； *Exist.*

观察 2： $\chi(S^2) = 2$ 与剖分的方式无关。 *Essentially Unique.*

曲面的三角剖分

定理 (Radó, 1925)

所有的曲面 *(*即 2 维流形*)* 都存在 *P.L.* 结构，即**可被三角剖分**。

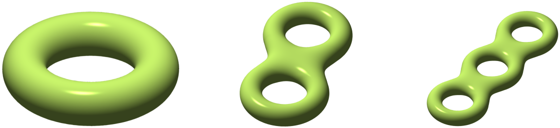
注: 给定曲面上的剖分“本质上”是唯一的。

曲面的三角剖分

定理 (Radó, 1925)

所有的曲面 *(即* 2 *维流形)* 都存在 *P.L.* 结构，**即可被三角剖分**。

注: 给定曲面上的剖分“本质上”是唯一的。

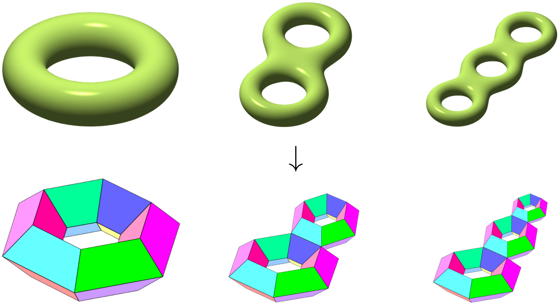


曲面的三角剖分

定理 (Radó, 1925)

所有的曲面 *(即 2 维流形)* 都存在 *P.L.* 结构，**即可被三角剖分**。

注： 给定曲面上的剖分“本质上”是唯一的。



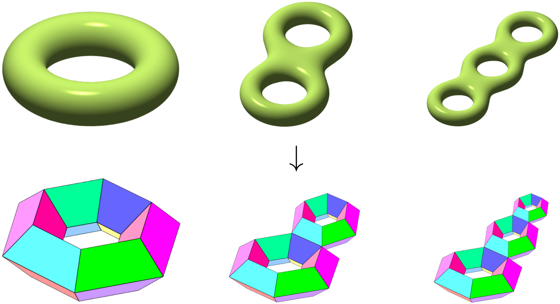
$\chi(T^2) = 0$ $\chi(2T^2) = -2$ $\chi(3T^2) = -4$

曲面的三角剖分

定理 (Radó, 1925)

所有的曲面 *(即 2 维流形)* 都存在 *P.L.* 结构，**即可被三角剖分**。

注: 给定曲面上的剖分“本质上”是唯一的。

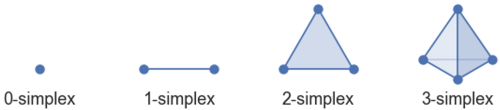


$\chi(T^2) = 0$ $\chi(2T^2) = -2$ $\chi(3T^2) = -4$

规律: $\chi(M) = 2 - 2g$，g 为闭曲面的亏格 (genus)。

单纯同调群

单形 (Simplex)：



$\cdots$

- 各维单形沿着“面”粘起来的几何体称为**单纯复形**；
- 单纯复形上全体 q 维单形生成的自由 Abel 群，称为 q 维**链群** C_q；
- $B_q \subseteq C_q$ 为 q 维**边缘链群**，即 C_{q+1} 中元素的“边界”；
- $Z_q \subseteq C_q$ 为 q 维 **闭链群**，即 C_q 中“首尾相接”的元素。
- $H_q := B_q / C_q$ 称为 q 维同调群。

注：如果一个拓扑空间 X **上存在**三角剖分 (同胚于单纯复形)，且三角剖分是**唯一**的，那么它有良定义的单纯同调群 $H_q(X), q \in \mathbb{Z}$。

单纯同调群的应用

定理 (Radó, 1925)

所有的曲面 (即 2 维流形) 都存在 $P.L.$ 结构，**即可被三角剖分**。

注: 给定曲面上的剖分“本质上”是唯一的。

因此我们可以通过计算单纯同调群，来区分不同的曲面!

单纯同调群的应用

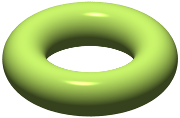
定理 (Radó, 1925)

所有的曲面 *(即 2 维流形)* 都存在 *P.L.* 结构，**即可被三角剖分**。

注: 给定曲面上的剖分“本质上”是唯一的。

因此我们可以通过计算单纯同调群，来区分不同的曲面！

$H_1(S^2) = 0$



$H_1(T^2) = \mathbb{Z}^2$

$H_1(2T^2) = \mathbb{Z}^4$

$H_1(3T^2) = \mathbb{Z}^6$

以上曲面的 1 维同调群不同，因此两两不同胚！

以上结论的任意维的推广？

推广需三角剖分的存在唯一性，此答辩重点讨论存在性：

猜想 (三角剖分猜想, Kneser, 1926)

任意 n 维的拓扑流形 M^n，M^n 同胚于一个单纯复形 (即可被三角剖分)

图: Hellmuth Kneser

以上结论的任意维的推广？

推广需三角剖分的存在唯一性，此答辩重点讨论存在性：

猜想 (三角剖分猜想, Kneser, 1926)

任意 n 维的拓扑流形 M^n，M^n 同胚于一个单纯复形 *(即可被三角剖分)*

图：Hellmuth Kneser

- $n=3$：ok! (Moise 1952) 3 **维流形都是光滑的，因此都可三角剖分。**
- $n=4$：no! (Casson 1990) Casson **不变量用于** Freedman **的** E_8 **流形，证明它是一个** 4 **维但不可剖分的流形。**
- $n \geqslant 5$：no! (Galeswki&Stern 1979) **将全体** $n \geqslant 5$ **流形是否能三角剖分的问题转化成一个"特定的正合列"是否裂正合的问题；** (Manolescu 2013) **使用规范场论的方法构造出合适的不变量，证明了那个"正合列"不是裂正合的，因此** $n \geqslant 5$ **均存在不可被三角剖分的流形。**

Galewski&Stern 的工作

定理 (Galewski&Stern, 1979)

若正合列

$$0 \to \ker(\mu) \xrightarrow{\iota} \Theta_3 \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z}/2 \to 0 \tag{1}$$

是裂正合的，则所有维数为 $n \geqslant 5$ 的流形上都存在三角剖分.

这里 μ 是 Rokhlin 同态，Θ_3 是 3 维的同调配边群。

除此之外，Galewski&Stern 的工作揭示了一系列的等价条件:

$$\begin{aligned}
\text{所有 } n \geqslant 5 \text{ 的流形可剖分} &\Longleftrightarrow \text{正合列 (1) 裂正合} && (2)\\
&\Longleftrightarrow \exists [Y] \in \Theta_3 \text{ s.t. } 2[Y] = 0,\ \mu(Y) = 1 && (3)\\
&\Longleftrightarrow N^5 \text{ 上存在三角剖分} && (4)
\end{aligned}$$

这里的 N^5 被称作 “Universal 5-manifold” (万有 5 维流形)。

一系列等价条件

$$\begin{aligned}\text{所有 } n \geqslant 5 \text{ 的流形可剖分} &\iff \text{正合列 (1) 裂正合} & (5)\\ &\iff \exists [Y] \in \Theta_3 \text{ s.t. } 2[Y] = 0,\ \mu(Y) = 1 & (6)\\ &\iff N^5 \textbf{ 上存在三角剖分} & (7)\end{aligned}$$

这里的 N^5 被称作“Universal 5-manifold”(万有 5 维流形)。

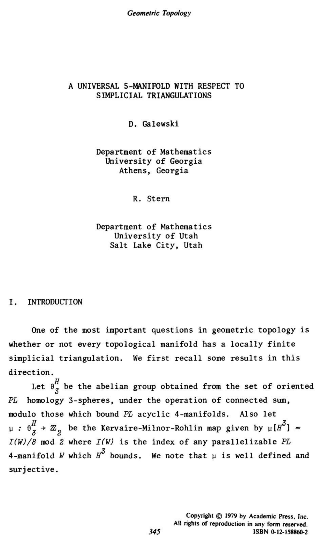
结论 *1*:

如果给出了 N^5 上的三角剖分，就证明了所有 $n \geqslant 5$ 的流形都可剖分;

结论 *2*:

如果证明了 (1) 不是裂正合的，那么 N^5 就是不可被剖分的例子!

Universal 5-manifold 的构造


Geometric Topology

A UNIVERSAL 5-MANIFOLD WITH RESPECT TO
SIMPLICIAL TRIANGULATIONS

D. Galewski

Department of Mathematics
University of Georgia
Athens, Georgia

R. Stern

Department of Mathematics
University of Utah
Salt Lake City, Utah

I. INTRODUCTION

One of the most important questions in geometric topology is whether or not every topological manifold has a locally finite simplicial triangulation. We first recall some results in this direction.

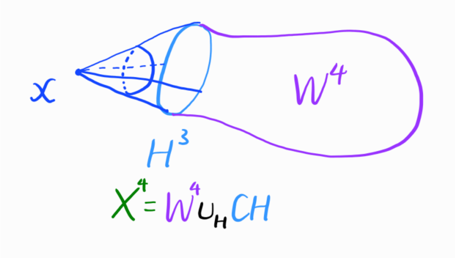
Let θ_3^H be the abelian group obtained from the set of oriented *PL* homology 3-spheres, under the operation of connected sum, modulo those which bound *PL* acyclic 4-manifolds. Also let $\mu : \theta_3^H \to \mathbb{Z}_2$ be the Kervaire-Milnor-Rohlin map given by $\mu[H^3] = I(W)/8 \bmod 2$ where $I(W)$ is the index of any parallelizable *PL* 4-manifold W which H^3 bounds. We note that μ is well defined and surjective.

345
ISBN 0-12-158860-2

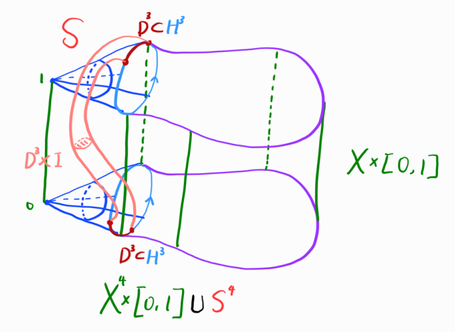
我们的工作：

1. 修正了原文中的很多书写错误；
2. 将“Universal 5-manifold”的构造可视化。

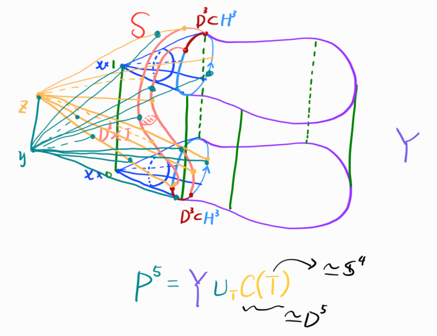
1. 取 H^3 是同调球，且 $\mu(H^3) = 1$(如 Poincaré 同调球)。**它将成为 P.L. 结构存在的障碍**。并且 H^3 是一个 4 维流形 W^4 的边界，再作锥形将其做成闭流形 X^4。



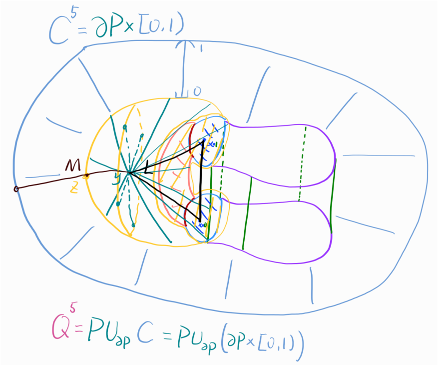
2. 取一个柱形 $X^4 \times [0, 1]$，在柱形的两侧作“**反定向的**边界连通和”，使其成为不可定向的流形.



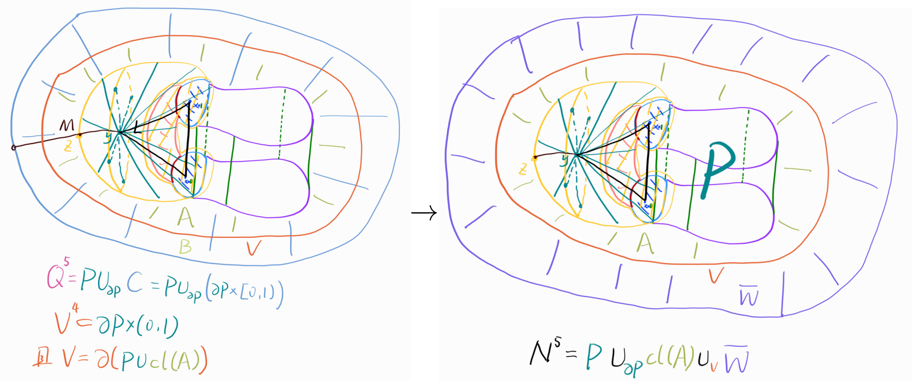
3. 反复做拓扑锥，并添加 exterior collar，使 H^3 成为 P.L. 结构的 “link” 阻碍。事实上，它是 $L = x \times [0,1] \cup y * (x \times \{0,1\}) \cong \mathbb{S}^1$ 的 link。



$\rightarrow$



利用 P.L. 横截 (transversality) 的性质，将 “领子 (collar)” 剪掉一半，使切口成为流形 $\overline{W}$ 的边界，并将原来的流形补成一个闭流形，这样我们就构造出了 N^5！



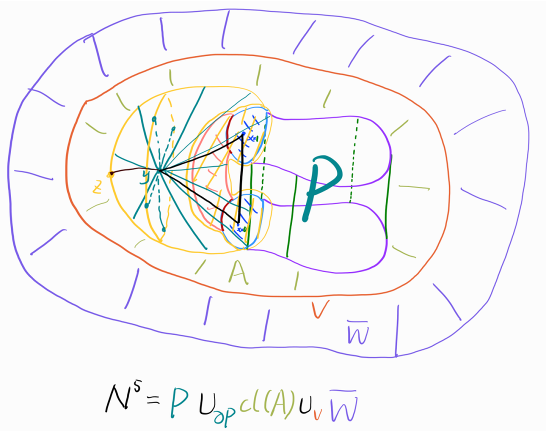


图: Universal 5-manifold

$X \times \frac{1}{2}$ 与 L 的 Poincaré 对偶分别对应非零的 w_1 和 Δ，因此 $Sq^1(\Delta(N)) = w_1(N) \smile \Delta(N) \neq 0$ 就满足 Universal 5-manifold 的要求!

Manolescu 的技术概览

- 对于整同调球 Y，$[Y] \in \Theta_3$，**可以定义它的构形空间** $\mathcal{C}(Y) = \Omega^1(Y; i\mathbb{R}) \oplus \Gamma(S)$，考虑它在“归一化的**规范作用**”$\mathcal{G}_0$ 下的商空间，得到无穷维空间 Coulomb slice V
- 在 V 的有限维逼近上可以定义 **Seiberg-Witten 方程**的 Morse 同调，进而可以定义 $\mathrm{Pin}(2)$ 等变的 **Seiberg-Witten Floer 同调** $SWFH_*^{\mathrm{Pin}(2)}(Y; \mathbb{Z}/2)$

图: Ciprian Manolescu

Manolescu 的技术概览

- $SWFH_*^{\mathrm{Pin}(2)}$ 的环结构由三条无穷长的 v 作用的“塔”构成，$\deg v = -4$，彼此通过 -1 次的作用 g 连接
- 次数从高到低的第 2 个塔的次数为 $2\mu(Y) + 1 \mod 4$，记它的最低次数为 B，则 $\beta = \frac{B-1}{2} \equiv \mu \mod 2$
- β 是同调配边不变量，还满足对偶性 $\beta(-Y) = -\beta(Y)$，因此，若 $2[Y] = 0 \in \Theta_3$，且 $\mu(Y) = 1$，那么 Y 与 $-Y$ 同调配边，故 $\beta(Y) = \beta(-Y)$，因此 $\beta(Y) = 0$，这与 $\mu(Y) = 1$ 矛盾。

综上就说明了正合列 $0 \to \ker(\mu) \xrightarrow{\iota} \Theta_3 \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z}/2 \to 0$ 不是裂正合的。

因此 $n \geqslant 5$ 的三角剖分猜想错误：

$M^n = N^5 \times T^{n-5}$ 就是不可剖分的 $n \geqslant 5$ 维流形。

其他范畴的情况

- Top 为拓扑流形的范畴
- P.L. 为分片线性 (P.L.) 流形的范畴
- Diff 为光滑流形的范畴

$$\mathrm{Top} \supsetneq \mathrm{P.L.} \supsetneq \mathrm{Diff}$$

其他范畴的情况

- Top 为拓扑流形的范畴
- $\mathrm{P.L.}$ 为分片线性 (P.L.) 流形的范畴
- Diff 为光滑流形的范畴

$$\mathrm{Top} \supsetneq \mathrm{P.L.} \supsetneq \mathrm{Diff}$$

Question: 可三角剖分的流形的范畴 Tri 应该放在什么位置？

其他范畴的情况

- Top 为拓扑流形的范畴
- $\mathrm{P.L.}$ 为分片线性 (P.L.) 流形的范畴
- Diff 为光滑流形的范畴

$$\mathrm{Top} \supsetneq \mathrm{P.L.} \supsetneq \mathrm{Diff}$$

Question: 可三角剖分的流形的范畴 Tri 应该放在什么位置？

Answer:

$$\mathrm{Top} \supsetneq {\color{red}\mathrm{Tri}} \supsetneq \mathrm{P.L.} \supsetneq \mathrm{Diff}$$

其他范畴的情况

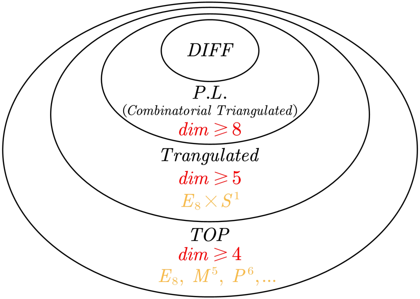


图: 各类流形的 Venn 图

1. 光滑流形上存在唯一的 P.L. 结构 (Cairns 1935, Whitehead 1940)，$n \leqslant 6$ 时二者等价。
2. P.L. 流形上有组合三角剖分结构，因此必可被三角剖分。
3. $n \leqslant 3$ 时，拓扑流形一定有光滑结构。(Moise 1952)

与广义 Poincaré 猜想的对比

表: 三角剖分猜想在各范畴下的解决情况

范畴	解决状况
拓扑	$n \leqslant 3$ 正确，$n \geqslant 4$ 错误
P.L.	各维数均正确
光滑	各维数均正确

表: Poincaré 猜想在各范畴下的解决情况

范畴	解决状况
拓扑	各维数均正确
P.L.	除 $n = 4$ 未解决外，其余维数均正确
光滑	$n = 1\ 2\ 3\ 5\ 6\ 12\ 56\ 61$ 正确， 其余奇数维均错误，超过一半的偶数维错误， 还有少于一半的偶数维未解决 (尤其是 4)

我们的收获

- 确定了攻读研究生的方向：
  几何与拓扑
- 学会了很多几何与拓扑基础知识：
  微分流形、黎曼几何、代数拓扑、纤维丛与示性类等研究生课
- 了解了一个方向的概况：
  三角剖分猜想、Poincaré 猜想、Freedman 的单连通 4 维流形分类定理、初步的规范场论等

我们收获颇丰，这些收获将成为我们继续在几何与拓扑方向深造的桥梁。

谢谢大家