

三角剖分猜想的学习笔记

徐敬浩

2025 年 5 月 31 日

目录

1 简介	2
2 三角剖分与组合三角剖分	3
3 三角剖分猜想发展的历史	6
3.1 是否所有的光滑流形都有三角剖分?	6
3.2 是否所有的拓扑流形都有三角剖分?	6
3.3 是否所有的拓扑流形都是 P.L. 流形 (存在组合剖分)?	6
4 Kirby-Siebenmann 关于组合剖分的工作	7
4.1 同调配边群 Θ_3	7
4.2 Kirby-Siebenmann class	9
5 Galewski&Stern 的 $n \geq 5$ 的工作	12
5.1 Steenrod 平方算子	12
5.2 $n \geq 5$ 的三角剖分等价条件	12
5.3 Universal 5-manifold 的构造	14
6 Manolescu 的工作	24
6.1 证明简述	24
6.2 Kronheimer-Mrowka 的构造方式	26
6.3 Manolescu 的构造方式	30
7 4 维拓扑及规范场论的应用	43
8 Poincaré 猜想	46

1 简介

三角剖分猜想是上个世纪以来几何拓扑领域的重要问题之一, 它串联起了一条研究的主线.

一个可以被三角剖分 (或者称单纯剖分) 的空间对应一个单纯复形, 单纯复形是研究拓扑问题的强大工具. 它是一个带组合结构的拓扑空间, 亦可视为一个有限的集合, 它的子集之间有组合结构, 规定了哪些 $n-1$ 维空间是哪些 n 维空间的面; 直观上来看, 就像立方体一样, 是一个规定好了体、面、棱、点之间关系的图形, 这能够帮助我们直接定义一些不变量.

流形是另一类性质良好的拓扑空间, 它在局部上同胚于一个欧氏空间, 也就是说它有很好的局部结构; 流形很普遍, 比如球面、Möbius 带、射影空间等等. 局部欧氏的性质让我们有机会在更普遍的空间上计算微积分, 然而这种局部性质几乎反馈不出流形的整体信息. 如果一个流形有光滑结构, 那么我们可以计算整体的微积分. 好消息是小于等于三维的拓扑流形上存在唯一的光滑结构, 因此像三维庞加莱猜想这类纯拓扑的问题可以用分析和方程的工具来解决, Perelman 就是利用 Ricci flow 这种偏微分方程的工具解决了三维庞加莱猜想.

对流形做三角剖分是研究其整体性质的强力手段; 比如欧拉示性数最初是由多面体引出, 后来可以推广高维的多面体, 进而推广到可被三角剖分的流形. 我们可以证明, 对于给定的流形, 它的欧拉示性数和剖分的方式无关, 也就是说, 它是一个拓扑不变量; 这种情况下, 我们更关心流形的三角剖分是否存在: 一旦存在, 我们就可以借助剖分结构计算出良好定义的拓分量; 相较于纯拓扑的手段, 这种计算往往是简单的.

此外, 借助拓扑空间上的三角剖分, 我们很容易计算它上面的单纯同调. 一类应用广泛的同调论是奇异同调, 它可以应用于所有的拓扑空间, 但具体的计算往往是复杂的; 单纯同调只能用于存在三角剖分, 且三角剖分本质唯一 (即在有相同重分的意义下) 的拓扑空间. 一些特殊的拓扑空间剖分不本质唯一, 甚至可能不存在剖分. 尽管有缺陷, 单纯同调在拓扑学中仍有重要地位, 由于它的定义更直观、计算更直接, 方便我们得出很多性质较好的空间上的结论.

一般的拓扑空间上三角剖分的存在唯一性被证否后, 数学家关心三角剖分在流形这种正则性更好的空间上的存在唯一性. 理想的状况是, 一个拓扑空间是流形的同时还是一个单纯复形 (即流形可以被三角剖分), 这样它就兼具了良好的局部性质和整体性质.

于是数学家们有猜测：

猜想 1 (三角剖分猜想). 一个拓扑流形同胚于一个单纯复形

这个问题最早由 Kneser 在 1926 年提出, 直到 2013 年 Manolescu 正式解决了这个问题 [Man15].

历史上这个问题的解决是分维数进行的; 事实上, 在 $n = 2, 3, 4, \geq 5$ 上的研究方式各不相同.

$n \leq 3$ 的情形是最早解决的, 而且激励人心的是, 这些情形三角剖分猜想都是正确的.

当 $n \geq 4$ 的情形高度开放的时候, 数学家们退而求其次, 不局限于最一般的拓扑流形 (即拓扑范畴), 而是研究三角剖分猜想在正则性更好的 P.L. (即 piecewise linear, 分片线性) 范畴以及光滑范畴下的表现.

各维数的三角剖分猜想在光滑范畴下均是正确的; P.L. 范畴下的流形拥有比单纯剖分更强的组合剖分, 故也均是正确的; 在拓扑范畴下, 当 $n \geq 4$ 时, 有不存在 P.L. 结构的例子, 而研究 P.L. 结构存在性的工具 Kirby-Siebenmann class 也可以复合 Bockstein 同态, 用于研究单纯剖分.

当数学家们构造出 4 维的不可剖分的流形, 否定了 4 维的三角剖分猜想时, 由于 4 维的怪异表现 (比如 \mathbb{R}^n , $n \neq 4$ 都有唯一的光滑结构, 而 $n = 4$ 时光滑结构有不可数无穷个), 并不敢断言 ≥ 5 时结论的正确与否, 而 $n \geq 5$ 的三角剖分猜想自 Galewski&Stern 在 80 年代的进展以来, 长期悬而未决, 直到 Manolescu 21 世纪以来构造的 Pin(2) 等变 Seiberg-Witten Floer 同调, 揭示了更多的对称性, 证否了 $n \geq 5$ 的猜想.

2 三角剖分与组合三角剖分

首先给出不同范畴下流形的定义以及单纯复形的定义, 进而描述流形的三角剖分以及组合三角剖分的概念.

定义 1. M^n 是一个有可数拓扑基的 Hausdorff 空间, 若 $\forall x \in X$, 存在 x 的邻域 $U, \phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是同胚映射, 则称 M 是一个 n 维拓扑流形, (U, ϕ) 是 x 点处的坐标卡.

定义 2. 若 M^n 是拓扑流形, 一个坐标卡的集合 $\{U_i, \phi_i\}_{i \in I}, \bigcup_i U_i = M$ 称为 M 的图册. 其中连续映射 $\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 称为转移映射. 若全体转

移映射均为光滑映射, 则称 M 是光滑流形, 其极大图册称为 M 的一个光滑结构 (这里指的是在光滑同胚下的等价类).

定义 3. 若 M^n 是拓扑流形, 且转移映射均为 $P.L.$ (分片线性) 映射, 则称 M 是 $P.L.$ 流形 (分片线性流形), 其极大图册称为 M 的一个 $P.L.$ 结构.

定义 4. (V, S) 称为抽象单纯复形, 若 V 为顶点集, $S \subset \mathcal{P}(V)$, 使得若 $\sigma \in S$ 且 $\tau \subset \sigma$, 则 $\tau \in S$. $\forall \sigma \in S, |\sigma| = d$, 若将 σ 换做 d 维单形 Δ^d , 称为 (V, S) 的几何实现, 记作 K , 称作单纯复形, $|K| = \bigsqcup_{\Delta^d \in K} \Delta^d$ 称为 K 的底空间.

后面我们不区分抽象单纯复形与其对应的单纯复形, 记 $K = (V, S)$.

单形 $\tau \in S$ 的 star 为

$$st(\tau) = \{\sigma \in S | \tau \subset \sigma\}$$

$S' \subset S$ 的闭包为

$$Cl(S') = \{\tau \in S | \tau \subset \sigma \in S'\}$$

单形 $\tau \in S$ 的 link 为

$$lk(\tau) = \{\sigma \in Cl(st(\tau)) | \tau \cap \sigma = \emptyset\}$$

仅要求拓扑流形同胚于单纯复形的剖分我们称为单纯剖分:

定义 5 (单纯剖分/三角剖分). n 维拓扑流形 M 可被三角剖分, 当且仅当存在同胚 $\varphi: M^n \rightarrow |K|$, 其中 K 为单纯复形.

为了更好地研究流形的剖分, 我们需要引入组合剖分的概念. 本文中提到的三角剖分若不加“组合”的定语, 均指的是单纯剖分.

如果我们对单纯复形要求更多的“组合结构”, 即要求它也得是“局部欧氏的”, 则有组合三角剖分:

定义 6 (组合三角剖分). n 维拓扑流形 M 可被组合剖分, 当且仅当存在同胚 $\varphi: M^n \rightarrow |K|$, 其中 K 为单纯复形, 且 $\forall A \in K, lk(A) P.L.$ 同胚于标准球面.

事实上, 一个流形有组合三角剖分当且仅当它是一个 $P.L.$ 流形.

组合剖分是比单纯剖分更强的一种剖分, 但它的正则性比微分条件更弱, 而性质上更贴近单纯剖分. 人们可以在组合剖分的基础上研究单纯剖分.

一个有单纯剖分而没有组合剖分的例子是 Poincaré 同调球 P^3 的 Double suspension $\Sigma^2 P$. 由 Double suspension 定理可知, $\Sigma^2 P \cong S^5$, 故 $\Sigma^2 P$ 上存在三角剖分; 然而它锥点处的 link 是 ΣP , 它不 P.L. 同胚于 S^4 (甚至不是流形), 故无 P.L. 结构, 即不可组合剖分.

事实上, 在拓扑流形 M 上存在组合剖分存在性的障碍——Kirby-Siebenmann class $\Delta(M)$, 只需在上同调序列中复合一次 Bockstein 同态 δ , 就得到了单纯剖分存在性的障碍 $\delta(\Delta(M))$.

关于三角剖分的唯一性, 曾有一个重要的猜想: Hauptvermutung (全称为 die Hauptvermutung der kombinatorischen Topologie, 即组合拓扑主要猜想), 详参见 [ARC96].

猜想 2 (多面体 (拓扑空间) 的 Hauptvermutung). 一个可三角剖分的拓扑空间的两种剖分方式有组合等价的细分.

或者等价刻画为: 两单纯复形若同胚, 则 P.L. 同胚, 且同胚映射同伦于它们之间的 P.L. 同胚.

多面体的 Hauptvermutung 于 1961 年由 Milnor 证否. 进而我们好奇正则性更强的空间上剖分是否唯一, 如流形:

猜想 3 (流形的 Hauptvermutung). 两个 P.L. 流形 M^n 和 N^n , 若同胚, 则它们 P.L. 同胚, 且同胚映射同伦于它们之间的 P.L. 同胚.

流形的 Hauptvermutung 最后也被证否了.

若一个可三角剖分的流形的两种剖分方式有组合等价的细分, 则称这两种剖分是本质唯一的 (essentially unique).

后面我们将介绍, 对于光滑流形而言, 它的所有三角剖分都是本质唯一的.

流形上存在两种不同的三角剖分 (单纯剖分) 结构的例子如 Poincaré 同调球 P^3 的 double suspension, 我们上面已经提到了, $\Sigma^2 P = S^5$, 且 S^5 上有一个标准的 P.L. 结构, 它是由 S^3 的标准 P.L. 结构经两次 suspension 得到的. 然而由于 $S^3 \not\cong P^3$, P^3 上的 P.L. 结构经过两次 suspension 后, 由 Double suspension 定理, 得到 S^5 的一个三角剖分结构 (前面提到了, 这不能是 P.L. 结构), 但与 S^5 的标准 P.L. 结构非组合等价, 否则与 $S^3 \not\cong P^3$ 矛盾. 这样 S^5 上就有两个不等价的三角剖分结构: 一个由 S^3 的 double suspension 诱导, 一个由 P^3 的 double suspension 诱导. 这与 $n = 5$ 时 P.L. Poincaré 的正确性不矛盾, 它说的是 S^5 上只存在唯一的 P.L. 结构.

3 三角剖分猜想发展的历史

我们现在认为三角剖分猜想的问题在 2013 年被 Manolescu 完全解决了 [Man15]. 现在让我们先给出三角剖分猜想在各个范畴、各个维数下的答案 [Man24]:

3.1 是否所有的光滑流形都有三角剖分?

光滑流形的正则性足够好, 因此它上面的答案是肯定的.

Cairns 在 1935 年 [Cai35], Whitehead 在 1940 年 [Whi40] 证明了: 任意光滑流形都有一个本质唯一的 P.L. 结构, 因此它是可被三角剖分的.

3.2 是否所有的拓扑流形都有三角剖分?

- 对于 $n = 0, 1$, 正确, 是平凡的;
- 对于 $n = 2$, 正确, Radó 在 1925 年证明了任意二维的曲面都有 P.L 结构, 进而都有三角剖分;
- 对于 $n = 3$, 正确, Moise 在 1952 年证明了任意 3 维流形都有光滑结构, 进而都有三角剖分;
- 对于 $n = 4$, 错误, 1990 年, Casson 将 Casson 不变量应用到 Freedman 构造的 E_8 流形上, 说明了它不可被三角剖分;
- 对于 $n \geq 5$, Galewski & Stern 在 1980 年和 Matumoto 在 1978 年, 将三角剖分存在性问题约化为了正合列的裂正合问题. 这个问题最终由 Manolescu 在 2013 年利用 $\text{Pin}(2)$ 等变的 Seiberg-Witten Floer 同调证否了.

3.3 是否所有的拓扑流形都是 P.L. 流形 (存在组合剖分)?

- 对于 $n \leq 3$, 正确, 理由同上;
- 对于 $n = 4$, 错误, Freedman 在 1982 年构造的 4 维 E_8 流形上没有分片线性结构;
- 对于 $n \geq 5$, 错误, Kirby-Siebenmann 构造了拓扑流形 M 上 P.L. 结构存在性的障碍, 即 Kirby-Siebenmann class $\Delta(M) \in H^4(M; \mathbb{Z}/2)$; 对

于 $n \geq 5$, 令 $M^n = E_8 \times T^{n-4}$, 则 $\Delta(M) \neq 0$, 故 M 是不存在组合三角剖分的流形.

对于流形所属的类别, 我们还有如下的包含关系 (图1): 正则性由弱变强依次是拓扑流形、可单纯剖分的流形、P.L. 流形 (可组合剖分的流形)、光滑流形. 其中 $n \leq 3$ 时, 所有的类别都是等价的, 即拓扑流形上存在唯一的光滑结构和 P.L. 结构, 而这个光滑结构和 P.L. 结构亦能相互决定; 当 $n \leq 6$ 时, 流形的 P.L. 结构决定唯一的光滑结构, 而 $n = 7$ 时, P.L. 流形上存在光滑结构, 但可能不唯一 [Mil11].

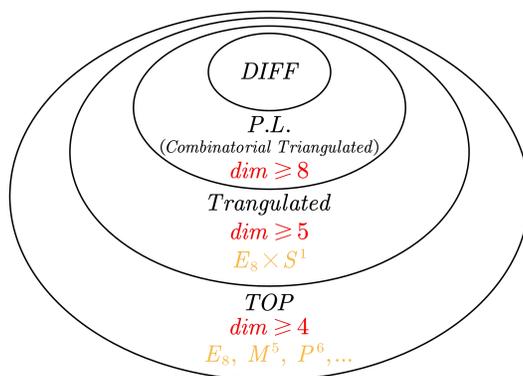


图 1: 流形分类的关系

4 Kirby-Siebenmann 关于组合剖分的工作

4.1 同调配边群 Θ_3

两个定向的 n 维流形 M_1^n, M_2^n 称为定向配边的, 记作 $M_1^n \sim M_2^n$, 若存在 $n+1$ 维定向带边流形 $W^{n+1}, \partial W^{n+1} \cong M_1^n \sqcup (-M_2^n)$. 此时流形 W^{n+1} 称为 M_1^n 与 M_2^n 之间的配边. 当 M_2^n 是空流形时, 称 M_1^n 配边于 0.

上面定义的定向配边关系 \sim 确是一个等价关系, 自反性由平凡配边 $W^{n+1} = M^n \times I$ 得, 对称性由 W^{n+1} 反转定向得, 传递性由粘接相同边界得.

定义 7. 以 $[M^n]$ 记 M^n 的定向配边等价类. 等价类的集合记作 Ω_n , 在 Ω_n

中定义加法运算,

$$[M_1^n] + [M_2^n] := [M_1^n \sqcup M_2^n],$$

则 Ω_n 成为 *Abel* 群, 其零元素为配边于 0 的流形的等价类, 称 Ω_n 为 n 维流形的定向配边群.

可以验证, 对于两条平凡配边 $M_1^n \times I, M_2^n \times I$, 沿着 $M_1 \times 0$ 与 $M_2 \times 0$ 作边界连通和, 得 $n+1$ 维定向流形 W , 则 $\partial W = (M_1 \# M_2) \sqcup -(M_1 \sqcup M_2)$, 故 $[M_1 \# M_2] = [M_1^n] + [M_2^n]$, 因此我们也可以用连通和定义 Ω_n 中的加法.

通过 Thom 配边理论或者三维的拓扑手术, 可以证明 $\Omega_3 = 0$, 意思是所有的定向的 3 维紧致流形都是某个定向的紧致 4 维流形的边界.

定义 8. 同调配边群 Θ_3 是整同调球在配边关系下形成的等价类的集合, 也就是说 $\forall Y \in \Theta_3, H_*(Y; \mathbb{Z}) = H_*(S^3; \mathbb{Z})$, 且 $Y_1 \sim Y_2 \in \Theta_3 \Leftrightarrow \exists X^4, \partial X = -Y_1 \cup Y_2, H_*(X; \mathbb{Z}) = H_*(S^3 \times [0, 1]; \mathbb{Z}), [S^3]$ 视作群的单位元, $Y \mapsto -Y$ 为取逆元的映射, $(Y_1, Y_2) \mapsto Y_1 \# Y_2$ 为加法, 于是构成一个 *Abel* 群.

与 $\Omega_3 = 0$ 的简单结论不同, Θ_3 在定义上加了“同调配边”的要求, 导致它的结构要复杂得多. 由于 $\Omega_3 = 0$, 故任意两个三维同调球之间都存在配边, 然而当这个配边是“平凡配边” $S^3 \times I$ 的“同调配边”时, 才认为两个同调球属于同一个同调配边群的等价类.

为了研究它的结构, 我们可以借助它到其它 *Abel* 群的同态, 如 Rokhlin 同态:

定义 9. Rokhlin 同态 $\mu: \Theta_3 \rightarrow \mathbb{Z}/2, \mu(Y) = \frac{\sigma(W)}{8} \pmod{2}$, 这里 W 是光滑的紧致的自旋 4 维流形, 且 $\partial W = Y, \sigma(W)$ 是 W 相交形式的符号差.

例如, 我们有 $\mu(S^3) = 0, \mu(P) = 1$, 这里 P 为 Poincaré 同调球, 可视作 E_8 -plumbing 得到的 4 维流形 (称为 E_8 流形) 的边界, 它的相交形式的矩阵为

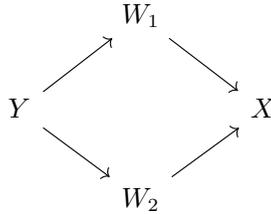
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

这个矩阵是 8 阶的负定矩阵 (Manolescu 的一些文章里把 E_8 矩阵取成正定阵, 没有本质区别), 所以 $\sigma(E_8) = 8, \mu(P) = 1$.

利用 Rokhlin 定理, 我们可以证明 μ 确是一个同态:

定理 1 (Rohklin). 对于光滑的闭自旋 4 维流形 X , $\sigma(X)$ 整除 16.

若 Y^3 可作为 4 维光滑自旋流形 W_1, W_2 的边界, 令 $X = W_1 \cup_Y W_2$, 则 X 是一个闭的 4 维自旋流形, 在嵌入映射的交换图表



诱导的同调序列中, 有 $H^2(X) = H^2(W_1) \oplus H^2(W_2)$, 因此 X 的相交形式的符号差等于 W_1 与 W_2 的相交形式的符号差之和, 又由 Rokhlin 定理, 可知 $\sigma(W_1) + \sigma(W_2) = \sigma(X) \equiv 0 \pmod{16}$, 故 $\sigma(W_1)/8 \equiv \sigma(W_2)/8 \pmod{2}$, 即 $\mu(Y)$ 的取值与 W 的选取无关, 同理可证 μ 的取值与同调配边群中等价类的代表元选取无关, 故 μ 是 Θ_3 上良定义的映射, 又若四维带边的紧致自旋流形 $\partial W_1 = Y_1, \partial W_2 = Y_2$, 则 $Y_1 \# Y_2 = \partial(W_1 \# W_2)$ 故 $\mu(Y_1 \# Y_2) = \mu(Y_1) + \mu(Y_2)$, 这就证明了 μ 是同态.

又由于 μ 是一个满同态, 这就说明了 Θ_3 不是一个平凡群.

由于存在 Rokhlin 同态, 可知 $|\Theta_3| \geq 2$, 此后一段时间数学家希望 μ 是 Θ_3 到 $\mathbb{Z}/2$ 的同构. 然而 Donaldson 研究 4 维流形时引入了规范场论的工具, Furuta 利用它证明了 Θ_3 不是有限生成的, 即它有一个 \mathbb{Z} 子群. 再后来, 人们发现它甚至有 \mathbb{Z} 子群是直和项, 甚至有 \mathbb{Z}^∞ 是直和项, 更甚至 $\Theta_3^H/\mathbb{Z}^\infty$ 还有一个 \mathbb{Z}^∞ 作直和项.

4.2 Kirby-Siebenmann class

主 G -丛是一种纤维丛, 其纤维为拓扑群 G , 且 G 可在纤维上自由作用.

对于给定的群 G , 可以构造一个主 G -丛 $EG \rightarrow BG$, 使得任意的以仿紧空间 B 为基空间的主 G -丛 $P \rightarrow B$, 可以由 $EG \rightarrow BG$ 拉回, 即存在丛映射 $f: P \rightarrow EG$, 诱导纤维的同构, 且 $P = f^*(EG)$; 另外全空间 EG 可缩, 满足这样条件的主 G -丛称为万有 G -丛.

主 G -丛的分类空间即万有丛 $EG \rightarrow BG$ 的基空间 BG , 分类的含义是, 对任意的拓扑空间 X , 其上的主 G -丛的同伦等价类与从 X 到 BG 的连续映射的同伦类一一对应.

比如无限维 Grassmann 流形可以作为主 O_k -丛的分类空间 (由于 k 维实向量丛可以约化为 O_k 丛, 故 Grassmann 流形也可以作为全体 k 维实向量丛的分类空间).

Grassmann 流形 $Gr(k, n)$ 是正交的 Stiefel 流形 $V^0(k, n)$, 即 \mathbb{R}^n 中全体正交标架的商空间, 商映射的等价关系为若两正交标架在 \mathbb{R}^n 中张成同一个 k 维子空间, 则二者等价. 即 $Gr(k, n)$ 是参数化 \mathbb{R}^n 中所有 k 维子空间的集合, 由定义可知 $V^0(k, n) \rightarrow Gr(k, n)$ 是主 $O(k)$ 丛. 欧氏空间由低维到高维的典则嵌入, 诱导了 $Gr(k, n), V^0(k, n), n \rightarrow \infty$ 的嵌入. 令 $Gr(k, \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} Gr(k, n)$, 得到的无穷维流形 $Gr(k, \infty)$ 就是 $O(n)$ 的分类空间, 即

$$EO(k) = V^0(k, \infty) \rightarrow BO(k) = Gr(k, \infty)$$

是主 $O(k)$ 丛的万有丛.

如果我们从 $Gr(k, \infty)$ 上每点选取 $V^0(k, \infty)$ 上纤维的代表元, 将这个纤维换成代表元的正交标架所处的 k 维子空间, 就得到了典则向量丛 $\gamma^k, \gamma^k \rightarrow Gr(k, \infty)$ 是 k 维向量丛的万有丛.

类似地, 我们定义 $TOP(n), PL(n), Diff(n)$ 分别是 \mathbb{R}^n 上全体保持原点的自同胚, 自 P.L. 同胚, 自微分同胚映射. 显然有 $TOP(n) \rightarrow TOP(n+1)$ 的含入映射, 其它两列群也同理, 令 $n \rightarrow \infty$, 我们就得到了三个群 $TOP, PL, Diff$, 存在含入映射 $Diff \rightarrow PL \rightarrow TOP$. 设它们的分类空间为 $BTOP, BPL, BDiff$, 则有含入映射 $BDiff \rightarrow BPL \rightarrow BTOP$.

一般地, 若 $H \subset G$ 是子群, 那么 EG 在自由 H 作用下是可缩空间, 且 $EG \rightarrow EG/H$ 是一个主 H 丛, 故 EG/H 可以视作分类空间 BH , 因此自然映射 $\psi: EG/H \rightarrow EG/G$, 实际上是 $BH \rightarrow BG$ 的模型, 且 ψ 的纤维等于 G/H .

因此, 我们可以将 $BDiff \rightarrow BPL$ 和 $BPL \rightarrow BTOP$ 的纤维分别等同于 $PL/Diff$ 和 TOP/PL

因此对于任意拓扑流形 X , 存在一个典则的映射 $f: X \rightarrow BTOP$, 且 X 上 PL 结构的存在性等同于 f 到 $F: X \rightarrow BPL$ 的映射提升问题, 而进一步的 $G: X \rightarrow BDiff$ 的存在性决定了 X 是否存在光滑结构.

以上的提升问题可以通过障碍理论来研究, 即上同调环中的障碍类. 其

中 $B\text{Diff} \rightarrow B\text{PL}$ 以及 $B\text{PL} \rightarrow B\text{TOP}$ 的纤维的同伦型在研究中有重要作用.

对于 n 维光滑流形 X , 存在典则映射 $f : X \rightarrow B\text{GL}_n(\mathbb{R})$, 是否存在提升 $F : X \rightarrow B\text{GL}_n^+(\mathbb{R})$ 决定了 X 是否可定向. 由于 $\text{GL}_n^+(\mathbb{R}) \subset \text{GL}_n(\mathbb{R})$ 是 2 个连通分支中的 1 个, 而 $\text{GL}_n(\mathbb{R})/\text{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2$, 因此 $B\text{GL}_n^+(\mathbb{R}) \rightarrow B\text{GL}_n(\mathbb{R})$ 的纤维是一个 $K(\mathbb{Z}/2, 0)$ 空间, 由标准的障碍理论可知, 决定定向存在性的障碍类存在于 $H^1(X; \mathbb{Z}/2)$. 可证明它恰好就是 Stiefel-Whitney 类 $w_1(X)$.

另外一个例子是二重覆叠 $\text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$ 诱导了纤维丛 $B\text{Spin}(n) \rightarrow B\text{SO}(n)$, 纤维为 $B(\mathbb{Z}/2)$, 是一个 $K(\mathbb{Z}/2, 1)$ 空间, 可以取作 $\mathbb{R}P^\infty$, 且 X 上自旋结构的存在性取决于典则映射 $f : X \rightarrow B\text{SO}(n)$ (取定 X 上的黎曼度量和定向) 能否提升到 $B\text{Spin}(n)$. 由障碍理论可知, 自旋结构存在的障碍存在于 $H^2(X; \mathbb{Z}/2)$, 可证明它恰好是 Stiefel-Whitney 类 $w_2(X)$.

前面提到了, 对于一般的拓扑流形 M , P.L. 结构的存在性问题就是图表所示的映射提升问题

$$\begin{array}{ccc} & & B\text{PL} \\ & \nearrow f & \downarrow \psi \\ M & \xrightarrow{\quad} & B\text{TOP} \end{array}$$

$\Delta(M)$ 定义为 $f : M \rightarrow B\text{TOP}$ 提升到 $B\text{PL}$ 的障碍, 则它有性质:

定理 2. 若 M^n 是拓扑流形, $n \geq 5$, 则 M 上有 P.L. 结构当且仅当 $\Delta(M) = 0 \in H^4(M; \mathbb{Z}/2)$. 此外, 若 $\Delta(M) = 0$, M 上互不等价的 P.L. 结构可以由 $H^3(M; \mathbb{Z}/2)$ 参数化.

类似前面定性和自旋的例子, 这里我们要讨论 $B\text{PL} \rightarrow B\text{TOP}$ 的纤维 TOP/PL 的同伦型. 在 [KS77] 中, 证明了 TOP/PL 是一个 $K(\mathbb{Z}/2, 3)$ 空间, 因此障碍类存在于 $H^4(M; \mathbb{Z}/2)$.

一般情况下我们很难把 $\Delta(M)$ 的具体形式表述出来. 对于特殊情况: 若拓扑流形 M 有三角剖分, 则我们可以给出 $\Delta(M)$ 的一个表达式.

为了表达简介, 我们先考虑可定向的情况: 设定向的拓扑 M^n 上取定三角剖分 K (不一定是组合剖分), 令

$$c(K) = \sum_{\sigma \in K^{n-4}} [lk(\sigma)] \in H_{n-4}(M, \Theta_3) \cong H^4(M, \Theta_3)$$

由 Poincaré 对偶, 可视作 $c(K) \in H^4(M; \Theta_3)$

利用满同态 μ , 我们可以构造短正合列:

$$0 \rightarrow \ker(\mu) \xrightarrow{l} \Theta_3 \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0$$

故诱导变系数的长正合列

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H^4(M; \Theta_3) \xrightarrow{\mu} H^4(M; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\delta} H^5(M; \ker \mu) \rightarrow \cdots \\ c(K) \mapsto \Delta(M) \end{aligned}$$

即 $\Delta(M) = \mu(c(K))$.

当 K 是组合剖分时, 有 $c(K) = 0$, 另一方面, $\mu(c(K)) = 0$ 能推出 M 上存在某个组合三角剖分三角剖分 (可能与 K 不同), 这就说明 $\mu(c(K))$ 的确是 P.L. 结构存在的障碍, 即 $\Delta(M) = \mu(c(K))$.

对于 M 不可定向的情况, 我们可以利用局部系数的庞加莱对偶, 仍可类似地取到 $c(K) \in H^4(M; \Theta_3)$.

然而这种构造依赖于三角剖分 K 的选取, 所以并不适用于直接研究单纯剖分的问题, 但在 Galewski&Stern 的工作中, 构造出一个 “Universal 5-manifold”, 利用反证法就可以有它的用武之地了.

5 Galewski&Stern 的 $n \geq 5$ 的工作

5.1 Steenrod 平方算子

对于短正合列

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{r} \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0$$

这里 r 是 $\text{mod } 2$ 的同态, 诱导长正合列

$$\cdots \xrightarrow{\beta} H^i(M; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\times 2} H^i(M; \mathbb{Z}/4) \xrightarrow{r} H^i(M; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\beta} H^{i+1}(M; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\times 2}$$

这里 M 是取定的拓扑流形; 这里的 Bockstein 同态 β 就是第 1 个 Steenrod 平方算子 Sq^1 , 即 $\text{Sq}^1 = \beta : H^k(M; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^{k+1}(M; \mathbb{Z}/2)$

5.2 $n \geq 5$ 的三角剖分等价条件

Galewski&Stern[GS80] 以及 Matumoto[Mat76] 给出了三角剖分 (单纯剖分) 存在性的上同调障碍, 且此障碍恰为 Bockstein 同态 $\delta : H^4(M; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^5(X, \ker(\mu))$ 复合 Kirby-Siebenmann class $\Delta(M)$, 即 $\delta(\Delta(M))$.

与 Δ 的引入类似, 三角剖分的障碍也是通过研究分类空间及其纤维化得到的. Galewski&Stern 构造了一个分类空间 $BTRI$, 拓扑流形 X 能否被三角剖分, 就取决于 $X \rightarrow BTOP$ 能否提升至 $X \rightarrow BTRI$. 证明的细节先略过, 最终有定理:

定理 3. 维数 $n \geq 5$ 的拓扑流形 M 上存在三角剖分, 当且仅当 $\delta(\Delta(M)) \in H^5(M; \ker(\mu))$ 为 0. 若 $\delta(\Delta(M)) = 0$, 则 M 上不同的三角剖分可以由 $H^4(M; \ker(\mu))$ 参数化.

借助此定理, 我们可以推得:

定理 4. 若正合列

$$0 \rightarrow \ker(\mu) \xrightarrow{\iota} \Theta_3 \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0 \quad (1)$$

是裂正合的, 则所有维数为 $n \geq 5$ 的流形上都存在三角剖分.

证明. 短正合列 (1) 裂正合, 则 $\exists \varphi : \mathbb{Z}/2 \rightarrow \Theta_3$ s.t. $\mu \circ \varphi = \text{id}$, 故 $\delta = \delta(\mu \circ \varphi) = (\delta \circ \mu) \circ \varphi = 0$ 故 $\delta(\Delta(M)) \equiv 0, \forall M^n, n \geq 5$, 故由定理3可知, 所有维数 $n \geq 5$ 的流形上都存在三角剖分. \square

事实上, 定理4的逆命题也是成立的.

Galewski&Stern 在 1979 年的文章 [GS79] 中构造了一个 “universal 5-manifold” N^5 , 满足 $\text{Sq}^1(\Delta(N)) \neq 0$, 此文将在5.3中详细介绍最初的构造方式.

借此条件我们就可以证明定理4的逆命题:

定理 5. 若 “universal 5-manifold” N^5 可以被三角剖分, 则正合列 (1) 裂正合.

为证明此定理, 我们补充一个同调论的结论

引理 1. 短正合列 (1) 裂正合 \iff 存在 3 维整同调球 Y 使得 $\mu(Y) = 1$ 且 $2[Y] = 0 \in \Theta_3$. (即 $Y \# Y$ 是一个整同调圆盘 W^4 的边界)

证明. \implies : 短正合列 (1) 裂正合, 则 $\exists \varphi : \mathbb{Z}/2 \rightarrow \Theta_3$ s.t. $\mu \circ \varphi = \text{id}$, 令 $[Y] = \varphi(1)$, 即有 $\mu(Y) = \mu(\varphi(1)) = 1, 2[Y] = 2\varphi(1) = \varphi(2) = 0$.

\impliedby : 令 $\varphi : \mathbb{Z}/2 \rightarrow \Theta_3, \varphi(1) = [Y], \varphi(0) = 0$, 由于 $2[Y] = 0$, 故 φ 是同态, 且 $\mu \circ \varphi = \text{id}$, 故 (1) 裂正合. \square

定理5的证明. 证明采用反证法: 假设短正合列1不裂正合, 则由1可知 $\forall [Y] \in \Theta$ 满足 $\mu(Y) = 1, 2[Y] \neq 0$, 即 Θ_3 不含 2 阶元.

记 Θ 是 N 的给定三角剖分上所有 3 维 link 生成的群, 它是 3 维同调配边群 Θ_3 的子群, 记 $i: \Theta \hookrightarrow \Theta_3$ 是含入映射.

由于 N 上的三角剖分含有限个 3 维 link, 故 Θ 可以写成有限个循环群的直和, $\Theta = \langle h_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle h_k \rangle$, 其中可设每一项或是自由循环群, 或是素数幂次阶的有限循环群.

我们再定义映射 $\gamma: \Theta \rightarrow \mathbb{Z}/4$, 只需在 $\{h_i\}_{i=1}^k$ 上定义即可: 1' 若 $\mu(h_i) = 0$, 令 $\gamma(h_i) = 0$, 2' 若 $\mu(h_i) = 1$, 且 $\langle h_i \rangle \cong \mathbb{Z}$, 令 $\gamma(h_i) = \langle h_i \rangle \pmod{4}$, 3' 若 $\mu(h_i) = 1$, 且 h_i 的阶为 p^m , 由于 μ 是同态, 且 $\mu(h_i) \in \mathbb{Z}/2$ 的阶为 2, 故 $p = 2$. 又由于 $\Theta \subset \Theta_3$ 不含二阶元, 故 $m \geq 2$, 亦可令 $\gamma(h_i) = \langle h_i \rangle \pmod{4}$. 由定义可知, $\mu \circ i = r \circ \gamma$.

决定 N 能否存在 P.L. 结构的障碍记作 $c(N) \in H^4(N; \Theta_3)$, 且由定义, 存在 $c'(N) \in H^4(N; \Theta)$ 使得 $i(c'(N)) = c(N)$. 故

$$\text{Sq}^1(\mu(c(N))) = \text{Sq}^1(\mu(i(c'(N)))) = \text{Sq}^1(r(\gamma(c'(N)))) = 0$$

由于 $\text{Sq}^1 \circ r = 0$. 又由于 $\mu(c(N)) = \Delta(N)$, 就得到了 $\text{Sq}^1(\Delta(N)) = 0$, 与 $\text{Sq}^1(\Delta(N)) \neq 0$ 矛盾. \square

定理5的逆否命题是说, 若正合列 (1) 非裂正合, 则 N^5 不可被三角剖分. 如果我们令 $M^n = N^5 \times T^{n-5}$, 则亦有 $\text{Sq}^1(\Delta(M)) \neq 0$, 类似刚才的结论, 我们就有

定理 6. 若正合列 (1) 非裂正合, 则在每个维数 $n \geq 5$ 上, 都存在不可被三角剖分的流形.

这个定理的逆否即定理4的逆命题.

于是我们有如下结论:

$$\text{所有 } n \geq 5 \text{ 的流形可剖分} \iff \text{正合列1裂正合} \quad (2)$$

$$\iff \exists [Y] \in \Theta_3 \text{ s.t. } 2[Y] = 0, \mu(Y) = 1 \quad (3)$$

$$\iff N^5 \text{ 上存在三角剖分} \quad (4)$$

5.3 Universal 5-manifold 的构造

下面的构造过程几乎是 Galewski&Stern 在 1979 年发表在 “Geometric Topology” 的文章 [GS79]: A UNIVERSAL 5-MANIFOLD WITH RE-

SPECT TO SIMPLICIAL TRIANGULATIONS A UNIVERSAL 5-MANIFOLD WITH RESPECT TO SIMPLICIAL TRIANGULATIONS, D. Galewski, R. Stern 的中译版, 但原文有大量的书写错误, 在此文中我把能识别出来的错误都做了修正.

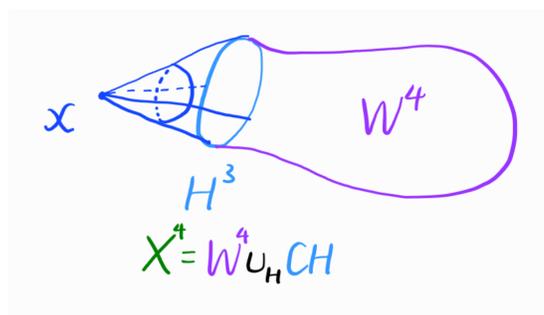
简单回顾一下利用“universal 5-manifold”得到的结论: 如果我们构造了一个闭的 5 维拓扑流形 N , 且 $Sq^1(\Delta(N))$, 那么它上面存在三角剖分当且仅当所有的 $n \geq 5$ 流形都存在三角剖分; 这也是为什么它被称作“universal 5-manifold”. 因为三角剖分的顶点数有限, 紧致性是流形上存在三角剖分的必要条件, 故这里需做一个闭流形.

引理 2. 一个 $n \geq 5$ 的维胞腔复形 (即单纯复形, 且每个顶点的 link 是 $n-1$ 维同调球面) $K, K \neq \emptyset$, 则 $|K|$ 是一个 n 维拓扑流形当且仅当 $|K|$ 顶点处的 link 均是单连通的.

这是 Cannon&Edwards 的 double suspension 定理的一个推论.(我尚未研究 double suspension 如何能推出这个引理; double suspension 定理说的是 3 维的同调球做两次 suspension 之后会同胚于 5 维球面; 这里等我搞清楚了会再补充解释.)

接下来我们几何化地构造一个闭的 5 维拓扑流形 N , 满足 $Sq^1(\Delta(N)) \neq 0$. 我将用大量的插图来辅助论述, 不同步骤中构造的对象将用不同的颜色表示, 并且几何体的维数会尽可能地用上标 n 标注:

取 H^3 是任意一个定向 3 维 P.L. 同调球, 它是一个定向的可平行化的 4 维 P.L. 流形 W 的边界, $\sigma(W) = 8$. 令 $X = W \cup_H CH$, 这里 CH 是 H 上的拓扑锥, 且设 x 是 CH 的锥点.



我们将一个 P.L. 1-环柄 $D^3 \times [0, 1]$ 贴到 $(CH \times 0 \cup CH \times 1) \subset X \times [0, 1]$ 上,

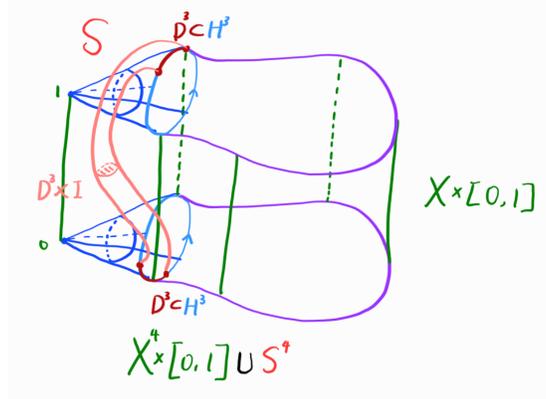


图 2: 注意两个 H 方向的选取, 以及 D^3 的连接方式

令 $S = CH \times 0 \cup_{D^3 \subset H^3} D^3 \times I \cup_{D^3 \subset H^3} CH \times 1$. 我们选取的粘贴环柄的方式须保证 $\partial S = H \# H$ (注意不是 $H \# -H$, 我们这里的连通和是两个相同定向的同调球做连通和).

可以看出来, ∂S 也是同调球, 且恰好为 $H \# H$, 即它本身是一个同调圆盘 $\approx \mathbb{D}^4$ 为了避免混淆, 我们用 \mathbb{S} 来表示标准球体, 即 S^3 .

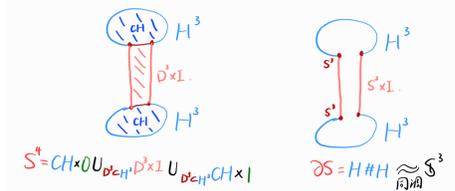
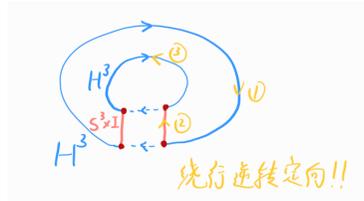


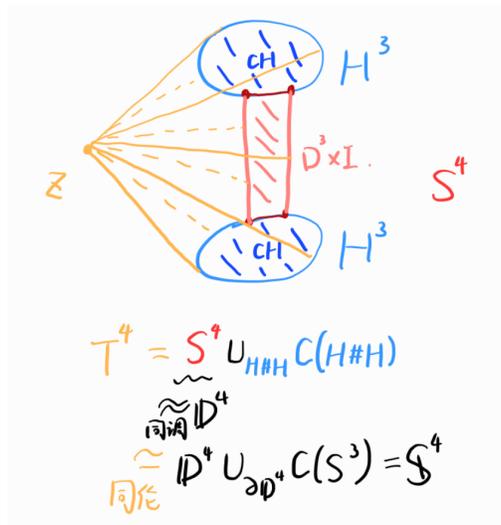
图 3: 这里为了绘图方便, 并没有突出定向选取的问题

我们之所以要强调连通和不是 $H \# -H$, 是因为后者做连通和前后定向相容, 而前者穿越连通和的边界, 定向会发生反转. 我们利用这个特性, 以及它们分别连接在 $X \times [0, 1]$ 的两侧, 我们就做出来了一个不可定向的几何体 $X \times [0, 1] \cup S$, 也就是说它的第一个 Stiefel-Whitney 类 $w_1(X \times [0, 1] \cup S) = 1 \in H^1(X \times [0, 1] \cup S; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 后续构造带来的更多点缀仍会保持 w_1 非零.



我们之所以要强调连通和不是 $H \# -H$, 是因为后者做连通和前后定向相容, 而前者穿越连通和的边界, 定向会发生反转. 我们利用这个特性, 以及它们分别连接在 $X \times [0, 1]$ 的两侧, 我们就做出来了一个不可定向的几何体 $X \times [0, 1] \cup S$, 也就是说它的第一个 Stiefel-Whitney 类 $w_1(X \times [0, 1] \cup S) = 1 \in H^1(X \times [0, 1] \cup S; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 后续构造带来的更多点缀仍会保持 w_1 非零.

接着, 在 S 的边界上做一个拓扑锥 $T = S \cup_{H\#H} C(H\#H)$,



由于 S 是一个同调圆盘, 在其边界上做一个拓扑锥就得到了 T 是一个 4 维同调球. 事实上 T 是一个 4 维同伦球.(我不知为何, 是否是由于它在同向连通和的同调球上做锥体导致的?)

再令 $Y = X \times I \cup (S \cup_{H\#H} C(H\#H))$, 设 z 是 $C(H\#H)$ 的锥点. (这里的 Y 不是流形, 它是一个 5 维的流形沿边界并一个 4 维的流形, 故 Y 仅是一个单纯复形, 或者称多面体.) 这里的多面体 Y 就包含了子多面体 $T = S \cup_{H\#H} C(H\#H)$.

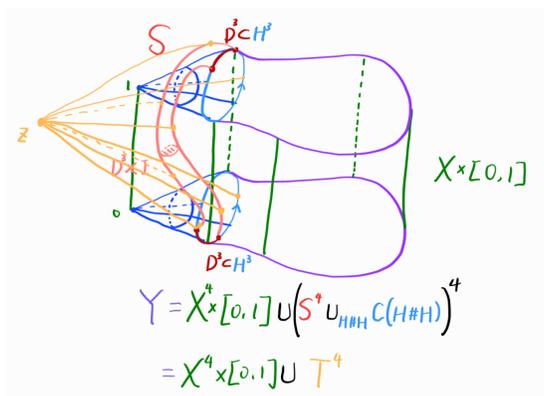
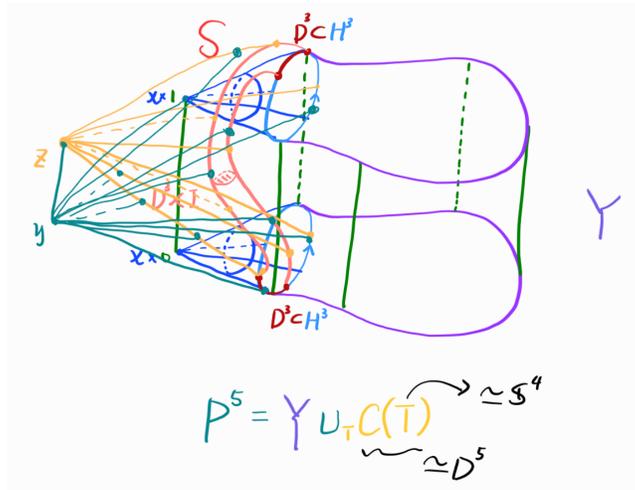


图 4: 注意 Y 由不同维数的两部分并得, 故不能是流形

再令 $P = Y \cup_T CT$, 设 y 是 CT 的锥点. 得到 P 是一个 5 维单纯复形.



这里同时绘制了两个锥体, 纸面上已经让人眼花缭乱了; 我们尝试利用 T 是同伦球的性质重新拾回几何直观, 它上面的锥体就无非是一个高 1 维的同伦圆盘.

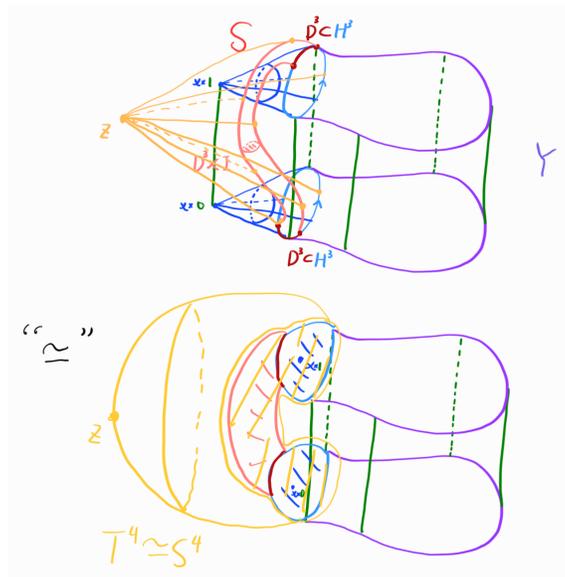
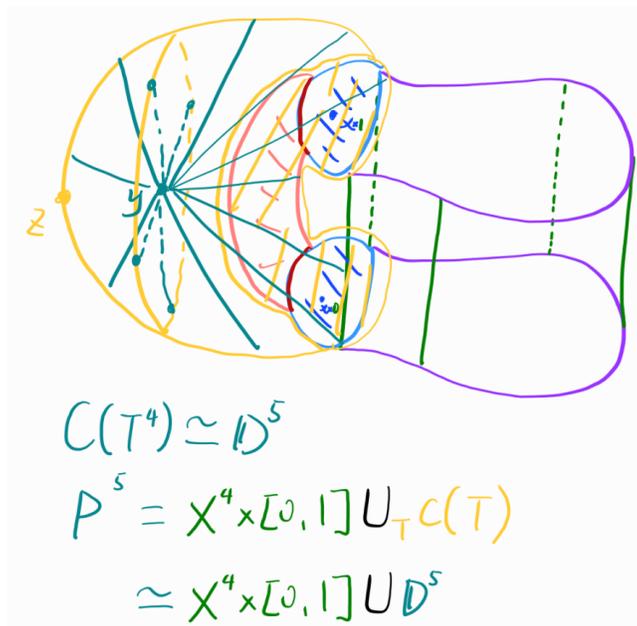


图 5: 用一个 4 维的球膜包住一个 3 维的同调圆周 $H \# H$

这样在 T 这个同伦球上做拓扑锥, 直观上就是把球体的内部填满,



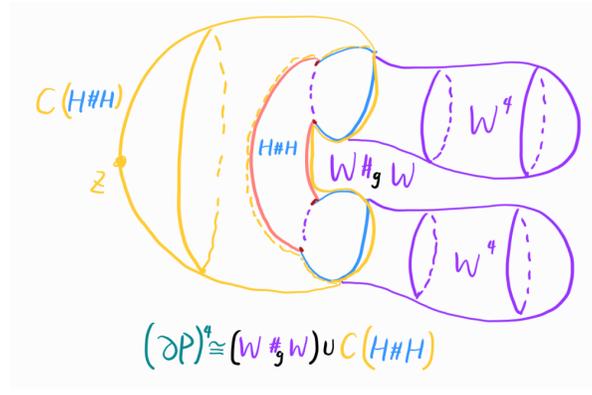
而 ∂P P.L. 同胚于 $W \#_g W \cup C(H \# H)$, 这里用 g 表示沿着边界的连通和.(原文中有书写错误, 我暂用 g 作替代) 因为有如下的计算:

$$\begin{aligned} \partial P &= X^4 \times \{0, 1\} \Delta T \\ &= (W \cup_H CH) \times \{0, 1\} \Delta (S^4 \cup_{H \# H} C(H \# H)) \\ &\cong (W \#_g W) \cup C(H \# H) \end{aligned}$$

这里 g 指沿边界的连通和, 即 $H \# H \subset W \#_g W$

这里我为了书写简洁, 不严格地使用了对称差符号 Δ . 严格来说应该是“二者之并”减掉“二者之交的内部”.

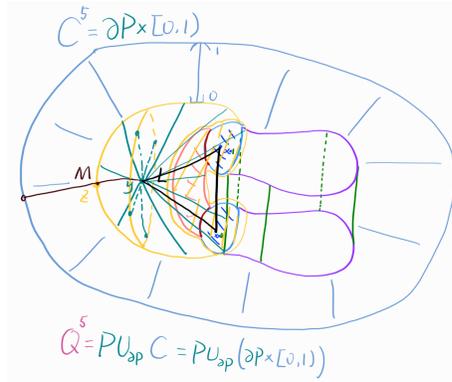
直观上 ∂P 是这样的:



由于 W 是可平行化流形, 故它上面的所有示性类消失, 且 $C(H\#H)$ 上的秩为 2 的示性类也全消失, 故 ∂P 的所有 Stiefel-Whitney 类都为 0. 接下来沿着 ∂P 添加一个 exterior collar(朝向外面的领子) $C = \partial P \times [0, 1)$, 得到一个 5 维单纯复形 Q .

我们首先观察到, 那些不 PL 同胚于 S^4 的四维 link, 诸如 $z, y, x \times 0$ 和 $x \times 1$ 的 link, 它们是单连通的(我只看明白了 y 的 link 为 T^4 是同伦球, 故 $\pi_1 = 0$). 所以由引理 2, Q 是一个有三角剖分的 5 维流形.

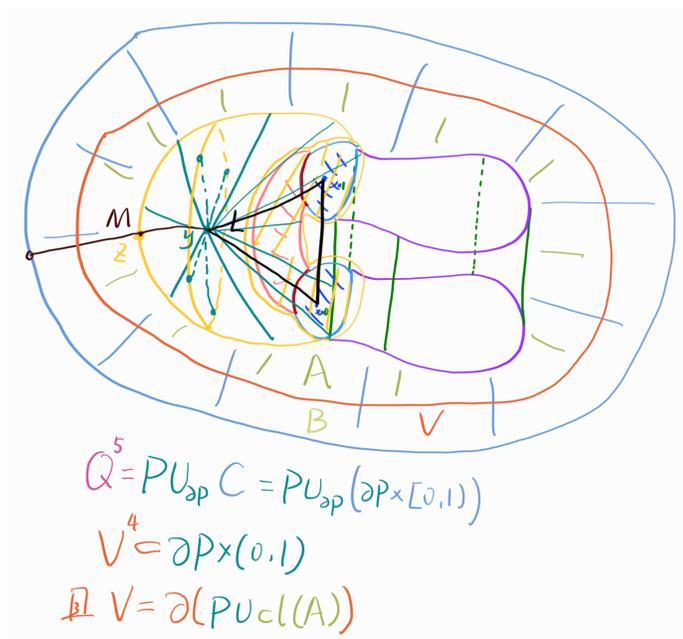
我们接着观察到, Q 上的那些不 P.L. 同胚于 S^3 的三维 link, 都是 Q 上的子多面体, 诸如 $L = x \times [0, 1] \cup y * (x \times \{0, 1\}) \cong S^1$ 和 $M = y * z \cup z \times [0, 1)$. L 的 1 维单形的 link 都 PL 同胚于 H , M 上 1 维单形的 link 都 P.L. 同胚于 $H\#H$. 又由于 $\mu(H\#H) = 0$, 且其它所有的 link 都是标准球面, 自然 μ 也为 0, 由 Siebenmann 的定理 [C], 必存在一个 $Q - L$ 上的 PL 结构 Σ . 这里 Σ 与 Q 的多面体结构不一致.



定理 7 (Siebenmann 的定理 [C]). 若一个无边拓扑流形 $W^n, n \geq 5$ 是可被三角剖分的, 但没有 P.L. 结构, 则存在 3 维同调球 M^3 且 Rokhlin 不变量 $\mu(M^3) = 1$, 使得 suspension $\Sigma^{n-3} M^3$ 同胚于 S^∞

至此我们的构造就快要完成了, 但是现在流形 Q 是开的流形, 我们需要把它“修剪、缝补”成一个闭流形:

我们现在可以利用 P.L. 横截 (transversality), 相对于 $\Sigma|_{\partial P \times (0,1)}$, 得到一个紧致连通的定向 4 维子流形 $V \subset \partial P \times (0,1)$, 它的法丛是平凡的, 并且把 $\partial P \times [0,1)$ 分离成两部分, A 和 B , 不妨设 $A \supset \partial P$, 则 $P \cup cl[A]$ 是一个拓扑流形, 且 $\partial(P \cup cl[A]) = V$.



由于 V 法丛平凡, 故所有 Stiefel-Whitney 类都是 0, 所以存在一个 5 维 P.L. 流形 \bar{W} , 使得 $V = \bar{W}$.



最后我们定义 $N^5 = P \cup_{\partial P} cl[A] \cup_V \bar{W}$.

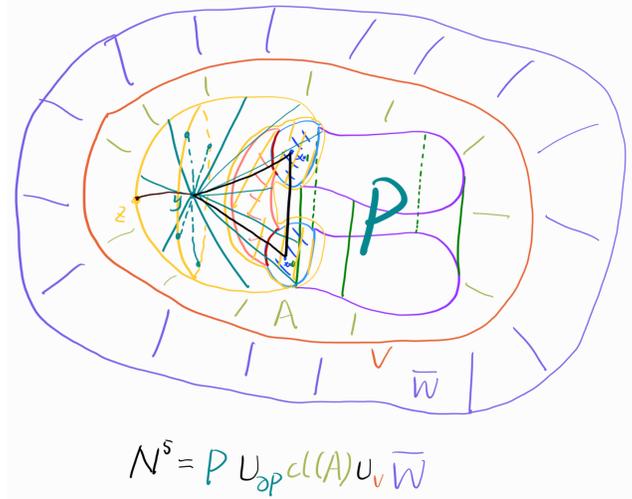


图 6: 这里的 \bar{W} 事实上是紧致的, 边界仅为 V , 为了绘图方便, 我们把它画在外面

由于 $Q-L$ 上有 P.L. 结构 Σ , 故 $N-L$ 也是一个 PL 流形, 因此 $\Delta(N)$ (P.L. 结构存在的障碍, 这里明显由 L 主导) 的 Poincaré 对偶就是 L . 且 $w_1(N)$ (定向存在的障碍, 因为 $w_1(X \times [0, 1] \cup S)$ 非零, $w_1(N)$ 也非零, 都由同向连通和 $H\#H$ 导致) 限制在 P 上的 Poincaré 对偶就是 $X \times \frac{1}{2}$ (可以认为把这个下同调的障碍从 $H\#H$ 连通和的交线上迁移到了乘积空间的截面上, N 去掉这个截面以后就变成了可定向的流形).

由吴类 (Wu class) 的定义, 对任意的流形 M 和 $x \in H^{n-k}(M)$, 吴类 v_k 满足 $v_k \smile x = Sq^k(x) \in H^n(M)$, 这里 Sq^k 是 Steenrod squaring 算子: $H^m(M) \rightarrow H^{m+k}(M)$, 满足 $Sq^0 = id_{H^m(M)}$, 故 $v_0 = 1$. 且吴文俊定理给出了吴类和 Stiefel-Whitney 类的关系:

定理 8 (Wu). $Sq(v) = w$

这里 $Sq = \sum_{k=0}^{\infty} Sq^k$, $v = \sum_{k=0}^{\infty} v_k$, $w = \sum_{k=0}^{\infty} w_k$, 且 $w_0 = 1$. 故 $w_1 = v_1 + Sq^1(1)$

由 Cartan 公式 $Sq^k(a \smile b) = \sum_{i+j=k} Sq^i(a) \smile Sq^j(b)$, 可知 $Sq^1(a) = Sq^1(1 \smile a) = Sq^0(1) \smile Sq^1(a) + Sq^1(1) \smile Sq^0(a) = Sq^1(a) + Sq^1(1) \smile a$, 故 $Sq^1(1) = 0$, $w_1 = v_1$. (这个证明还可以从 Sq 的自然性考虑, 即存在

$f: M \rightarrow pt$ 是平凡的连续函数, 故 $Sq^1(1_M) = Sq^1(f^*1_{pt}) = f^*(Sq^1(1_{pt}))$, 而 $Sq^1(1_{pt}) \in H^1(pt; \mathbb{Z}/2) = 0$, 故 $Sq^1(1_M) = 0$.

综上可知 $Sq^1(x) = v_1 \smile x = w_1 \smile x$

故 $Sq^1(\Delta(N)) = w_1(N) \smile \Delta(N)$, 然而 $\langle w_1(N) \smile \Delta(N), [N] \rangle \neq 0$ 为 L 和 $X \times \frac{1}{2}$ 的相交数 ($L \cap (X \times \frac{1}{2}) \neq \emptyset$), 故 $Sq^1(\Delta(N)) \neq 0$. 即 N 是所需的 5 维流形.

总结一下上面的构造思想: 我们要做一个 5 维流形 N , 其中 $Sq^1(\Delta(N))$ 是第 5 个上同调群中的非零元, 由关于示性类的计算可知, 它是第 1 个 Stiefel-Whitney 类 $w_1 \in H^1(N; \mathbb{Z}/2)$ 和 Kirby-Siebenmann 类 $\Delta(N) \in H^4(N; \mathbb{Z}/2)$ 的 cup product, 由于 w_1 是定向的障碍, Δ 是 P.L. 结构存在的障碍, 在几何上, 我们就要从一个不可定向、没有 P.L. 结构的流形中找到一个 4 维的闭子流形 (对应 w_1) 和一个 1 维的闭子流形 (对应 Δ), 它们是下同调类中的元素, 且挖去它们之后, 流形分别获得定向和 P.L. 结构, 那么它们就是几何上二者的障碍, 其 Poncaré 对偶就是相应上同调类中的元素. 在构造的过程中, 我们反复做拓扑锥, 引入了很多锥点, 锥点往往不是流形点 (它的 link 可能不是球面), 因此我们要加 collar, 把锥点给“藏起来”, 然而这样得到的是一个开流形, 这时候我们再做一些“修剪、缝补”的手术, 就可以得到一个闭流形了.

5.3.1 一种更直接的构造

[Man24] 中给的是另一个 $Sq^1(X) \neq 0$ 的例子, 借助于四维流形相交形式的理论, 它的构造更直接 (但这套理论的发表晚于 Galewski&Stern 的构造), 来自于 Kronheimer:

令 $X = *(\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2})$ 是一个单连通的 4 维流形, 相交形式为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ 合同于 } -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

这里 ‘*’ 表示它是与 $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ 相交形式相同的, 与之同伦等价但不同胚的另一个单连通的闭四维流形.

Freedman 在 1982 年的一系列结论 [Fre82] 证明了这个的流形存在性: 一般地, 若一个相交形式是奇形式 (若 $x^T Q x$ 恒为偶数, 称 Q 是偶形式, 否则称奇形式), 则以它为相交形式的拓扑流形恰好存在两种同胚型, 且至多其中的一个容许光滑结构. 而有无光滑结构由 Kirby-Siebenmann 不变量 Δ

区分. 由于 $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ 有一个自然的光滑结构, X 就是不具光滑结构的另一个同胚型, 且 $\Delta(X) \neq 0$.

Freedman 的工作还说明了, 由于存在 X 的相交形式到它的负矩阵的合同变换, 故存在 $f: X \rightarrow X$ 是定向反转的同胚. 取 M^5 是 f 的映射环面. 即

$$M = (X \times I)/(x, 0) \sim (f(x), 1).$$

由于 $\Delta(X) \neq 0 \in H^4(X; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$, 故 $\Delta(M) \neq 0$, 且映射环面“同向粘接”柱面的边界, 使得 M 是不可定向流形 (类似 Klein 瓶), 故 $w_1(M) \neq 0$ 类似 Galewski&Stern 的构造中的结论, 我们有:

$$Sq^1 \Delta(M) = \Delta(M) \smile w_1(M) \neq 0$$

6 Manolescu 的工作

Manolescu 的工作使用了 gauge theory 的技术. 确切地说, 这是一个称作 $\text{Pin}(2)$ 等变 Seiberg-Witten Floer 同调的一种 Floer 同调. Gauge 理论是研究一种特定的椭圆偏微分方程的学科, 它首次出现在物理学, 反映了粒子间的强弱相互作用. 在 1980 年代, Donaldson 首创了 gauge theory 在低维拓扑的应用. Floer 同调从 gauge theory 中构造, 是一种有关三维流形的不变量, 在研究配边的时候非常有用. (两个三维流形 Y, Y' 之间的配边就是起始边界为 Y , 终止边界为 Y' 的三维流形.) Floer 同调被 Atiyah 称为拓扑量子场论 (TQFT). TQFT 的主要性质是: 从 Y 到 Y' 的配边诱导了两个三维流形相应不变量之间的映射 (在这个情况下, 指的是他们的 Floer 同调之间的映射). 对于通常的同调论, 我们需要一个 Y, Y' 之间确切存在的映射 (而不是配边) 来得到同调之间的映射. 不同种类的 Floer 同调 (如 Seiberg-Witten, Heegaard Floer) 是研究三维流形之间配边的主要工具, 解决三角剖分猜想只是它的一个应用.

6.1 证明简述

通过 Galewski-Stern 和 Matumoto 的工作, 我们知道三角剖分猜想是否成立, 等价于短正合列 1 是否裂正合. 而裂正合等价于 $\exists [Y] \in \Theta_3, 2[Y] = 0, \mu(Y) = 1$.

如果我们想证否三角剖分猜想, 只需说明不存在这样的 $[Y]$, 只需找到一个从 Rokhlin 同态 $\mu : \Theta_3 \rightarrow \mathbb{Z}/2$ 到 $M : \Theta_3 \rightarrow \mathbb{Z}$ 的提升, 即

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{Z} \\ & \nearrow M & \downarrow \text{mod } 2 \\ \Theta_3 & \xrightarrow{\mu} & \mathbb{Z}/2 \end{array}$$

等价地来说, 我们需要找到一个 (定向) 整同调球 Y 的不变量 $m(Y) \in \mathbb{Z}$, 满足

1. $m(Y)$ 是一个同调配边不变量, 所以诱导 (desends) 了一个映射 $M : \Theta_3 \rightarrow \mathbb{Z}$;
2. $m(Y)$ 的 mod 2 约化就是 $\mu(Y)$;
3. m 满足 $m(Y_1 \# Y_2) = 2M(Y)$, 故 M 是一个群同态.

这样, 如果有 $\mu(Y) = 1, [Y]$ 的阶必不可能为 2.

目前为止, 我们没有找到满足上述 3 条性质的不变量. Casson 不变量 $\lambda(Y)$ 是 $\mu(Y)$ 的提升, 但它不是一个同调配边不变量; Frøyshov 不变量 $h(Y)$ 、由 Monopole Floer 同调引出的映射 δ 、由 Heegaard Floer 同调引出的 Ozsvath-Szabo 纠正项 (correction term) $d(Y)$, 它们都是由 Θ_3 到 \mathbb{Z} 的同态, 但不是 μ 的提升.

然而, Manolescu 利用 $\text{Pin}(2)$ 等变理论找到的同调配边不变量 (同调配边关系下不变) α, β, γ , 尽管不满足上面的条件 (β 不是同态, 比如令 $Y = \Sigma(2, 3, 11)$ 是 Brieskorn sphere, 有 $\beta(Y) = 0$, 但 $\beta(Y \# Y) = 1$), 但 β 有性质: $\beta(-Y) = -\beta(Y)$, 这足够证否三角剖分猜想, 即

定理 9.

$$0 \rightarrow \ker(\mu) \xrightarrow{\iota} \Theta_3 \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0$$

不是裂正合的.

证明. 证明采用反证法. 假设正合列裂正合, 则存在 $[Y] \in \Theta_3, 2[Y] = 0$, 且 $\mu(Y) = 1 \in \mathbb{Z}/2$, 则 $\beta(Y) \in \mathbb{Z}$ 是一个奇数, 有 $\beta(-Y) = -\beta(Y)$, 由于 Y 的阶是 2, 则 Y 和 $-Y$ 是同调配边, 也就是说 $\beta(Y) = \beta(-Y)$. 这表明 $\beta(Y) = 0$, 矛盾. \square

尽管 Manolescu 构造的不变量 β 解决了三角剖分猜想, 但它不满足 $\beta(Y_1 \# Y_2) = \beta(Y_1) + \beta(Y_2)$, 即它不是一个同态. 是否存在一个同态 $M : \Theta_3 \rightarrow \mathbb{Z}/2$ 是 μ 的提升, 仍是一个开放问题.

6.2 Kronheimer-Mrowka 的构造方式

首先介绍一些基础概念: Monopole Floer 同调是 3 个有限生成的分次 $\mathbb{F}[U]$ 模, 这里 $\deg(U) = -2$, 意思是 U 作用在分次群的元素上会使元素的次数 -2 ; $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2$. Monopole Floer 同调的定义需要用到流形的 $spin^c$ 结构, 特别地它是定义在任意可定向的闭三维流形上的 (可定向的三维闭流形有唯一的 $spin$ 结构, 进而是唯一的 $spin^c$ 结构) 拓扑不变量. 而证否三角剖分猜想只需用到它在整同调球上的性质, 且后面我们会证明, 由它引出的 α, β, γ 这三个整同调球上的函数是配边关系下的不变量, 进而可以视作 $\Theta \rightarrow \mathbb{Z}$ 的映射.

因此, 为了构造的简介, 下面只考虑整同调球 Y 的 Monopole Floer 同调, 即 $\widetilde{HM}(Y)$, $\widehat{HM}(Y)$ 以及 $\overline{HM}(Y)$, 它们分别对应一个带边无穷维流形的同调, 相对于边界的同调, 以及边界的同调, 故它适用于同调三角形

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{HM}(Y) & \xrightarrow{j_*} & \widehat{HM}(Y) \\ & \swarrow i_* & \searrow p_* \\ & \overline{HM}(Y) & \end{array}$$

事实上, 这些同调相应的上同调群同构于 $-Y$ 的同调群.

关于这个带边无穷维流形的构造, 有两种方法, 一种是 Kronheimer and Mrowka [KM07] 给出的, Francesco Lin 的两篇文章 [Lin16][Lin17] 也介绍了如何用这种方法构造 Seiberg-Witten Floer 同调, 思想是用“实爆破”的方法处理可约临界点; 另一种是 Manolescu 采取 Furuta 的“有限维逼近”的方法给出的, 思想是将有限维的 Morse 理论应用到无限维.

我们将概述第一种方法的证明思路, 并在下一节详细叙述第二种方法的构造过程.

第一种方法构造出的带边无穷维流形为 $\mathcal{B}_0^\sigma \times ES^1/S^1$, 以下给出构造的过程以及缘由:

首先我们给出一些要用到的基础概念.

对于整同调球 Y , 设 g 是 Y 上的黎曼度量, 并取 TY 上的 Levi-Civita

联络 ∇ . 考虑平凡 \mathbb{C}^2 丛 $S \rightarrow Y$, 定义 TY 在 S 上的作用

$$\rho : TY \rightarrow \mathfrak{su}(S) \subset \text{End}(S)$$

, 它将 TY 的一组正交标架 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 映射成 Pauli 矩阵, 即

$$\rho(e_1) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \rho(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

利用度量给出的典则同构 $TY \cong T^*Y$, 和复线性扩张, 我们可以诱导一个映射, 仍记作 ρ ,

$$\rho : T^*Y \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{sl}(S) \subset \text{End}(S)$$

设 A 是 $S \rightarrow Y$ 的 *spin* 联络, 即协变导数 ∇_A 满足 $\nabla_A(\rho(v)\phi) = \rho(\nabla v)\phi + \rho(v)\nabla_a\phi$, $v \in \Gamma(TY)$, $\phi \in \Gamma(S)$ 是旋量 (spinor).

TY 的平凡化提供了平凡联络 A_0 , 而 *spin* 联络可写作 $A = A_0 + a$, $a \in \Omega^1(Y; i\mathbb{R})$.

则构形空间 (configuration space) $\mathcal{C}(Y)$ 由 $(a, \phi) \in \Omega^1(Y; i\mathbb{R}) \oplus \Gamma(S)$ 构成, 其中 $A_0 + a$ 是 S 上的 *spin* 联络, $\phi \in \Gamma(S)$ 是旋量.

设规范群为 $\mathcal{G}(Y) = \{f : Y \rightarrow S^1\}$, 它在 $\mathcal{C}(Y)$ 上有自然的作用, 即

$$f \cdot (a, \phi) = (a - f^{-1}df, f \cdot \phi).$$

当 $\phi \neq 0$ 时, 这个作用是自由的, 而对于 $(a, 0)$, 它有稳定子群同构于 S^1 , 即全体 $Y \rightarrow S^1$ 的常值映射. 故取定点 $y_0 \in Y$, 定基点的规范群 $\mathcal{G}_0(Y) := \{f : Y \rightarrow S^1, f(y_0) = 1\}$ 在 $\mathcal{C}(Y)$ 上自由作用. 故可以定义无穷维流形

$$\mathcal{B}_0(Y) = \mathcal{C}(Y)/\mathcal{G}_0(Y)$$

由定义可知, $\mathcal{B}_0(Y)$ 在 reducibles 之外的点上的 S^1 -作用是自由的.

定义 Dirac operator $\not{D} : \Gamma(S) \rightarrow \Gamma(S)$,

$$\not{D}(\phi) = \sum_{i=1}^3 \rho(e_i)\nabla_{e_i}\phi$$

更一般地, 对于 *spin* 联络 A , 可以定义 “twisted Dirac operator” $\not{D}_A := \rho \circ \nabla_A$, 即

$$\Gamma(S) \xrightarrow{\nabla_A} \Gamma(T^* \times S) \xrightarrow{\rho} \Gamma(S)$$

接着定义 Chern-Simons-Dirac 泛函 $\text{CSD} : \mathcal{C}(Y) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{CSD}(a, \phi) = \frac{1}{2} \int_Y (\langle \phi, \not{D}\phi + \rho(A)\phi \rangle d\nu - a \wedge da)$$

这里 $d\nu$ 是 Y 上黎曼度量的体积元.

由于 Y 是整同调球, 故 CSD 是规范不变量, 即在 $\mathcal{G}(Y)$ 作用下取值不变, 故可视作 $\mathcal{B}_0(Y)$ 上 S^1 - 不变的泛函.

类似 Morse 同调, 这里 CSD 的临界点将作为 Monopole Floer 同调的生成元, 流线方程 $\dot{x} = -\text{grad CSD}(x(t))$ 的解将作为边缘映射.

而 CSD 的梯度为

$$\text{grad CSD}(a, \phi) = (*da - 2\rho^{-1}((\phi \otimes \phi^*)_0), \not{D}\phi + \rho(a)\phi) \in \mathcal{C}(S),$$

其中 ϕ^* 表示对偶截面, 故 $\phi \otimes \phi^*$ 是 S 上的自同态, $(\phi \otimes \phi^*)_0$ 表示它的迹为 0 的部分. 则 CSD 的临界点由 Seiberg-Witten 方程

$$\widetilde{SW}(a, \phi) = \begin{cases} *da - 2\rho^{-1}(\phi \otimes \phi^*)_0 = 0, \\ \not{D}\phi + \rho(a)\phi \end{cases}$$

决定.

然而, 现在的构造的对象无法实现为简单的 Morse 同调, 比如有如下的问题:

1. \mathcal{B}_0/S^1 上的极限点不是孤立的, 故需扰动 S-W 方程得到孤立临界点;
2. CSD 在临界点处的 Hessian 矩阵可能有无穷个正特征值和无穷个负特征值, 故临界点的指数 (负特征值个数) 无法良定义.
3. 在可约临界点不是 \mathcal{B}_0/S^1 的流形点.

前两个问题可以通过标准的 Floer 理论的方法来克服, 而解决第三个问题有个选择: (a) 忽略可约临界点; (b) 使用“实爆破 (real blow-up)”的操作. 然而忽略可约临界点将带来很多问题: 比如得到的结果将不是微分统配不变量, 而且很多的拓扑信息 (比如证否三角剖分猜想的关键信息), 都在可约临界点上.

实爆破的操作是由 Kronheimer-Mrowka 开创的. 考虑 $\mathcal{C}^\sigma(Y) := \mathcal{C}(Y) \times \mathbb{R}^{\geq 0}$, 映射 $\pi : \mathcal{C}^\sigma(Y) \rightarrow \mathcal{C}(Y)$, $(a, \psi, s) \mapsto (a, s \cdot \psi)$ 为 Blow-down 映射, 令 $\mathcal{B}_0^\sigma = \pi(\mathcal{C}^\sigma(Y))/\mathcal{G}_0(Y)$ 为带边的无穷维流形.

对于一般的紧李群 G , 若能作用在空间 X 上, 则可做 Borel 构造: 定义 G 的等变上同调为 $H_*^G(X; \mathbb{F}) := H_*(X \times_G EG; \mathbb{F})$, 这里 $EG \rightarrow BG$ 为万有主 G - 丛, 故 EG 是自由 G 作用的可缩空间, 且这里 $X \times_G EG = (X \times EG)/G$, 是 G 作用的轨道空间, $g \in G$ 在乘积空间上的作用定义为 $g \cdot (x, e) = (gx, eg^{-1})$, 且由于 $BG = EG/G$, 存在纤维化

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & X \times_G EG \\ & & \downarrow \pi \\ & & BG \end{array}$$

特别地, 若 G 在 X 上自由, 则 $X \times EG/G = X/G$.

并且由此构造可知下同调分次群 $H_*^G(X; \mathbb{F})$ 为上同调环 $H_G^*(pt; \mathbb{F}) := H^*(BG; \mathbb{F})$ 上的模, 上同调环在下同调群上的作用为 cap product.

特别地, 当 $G = S^1$ 时, $BG^1 = \mathbb{C}P^\infty$, 而 $H^*(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{F}) \cong \mathbb{F}[U]$, 且 $\deg(U) = -2$. 而配边关系诱导了 $\mathbb{F}[U]$ 模之间的同态.

这时我们就得到了 $\widetilde{HM} = H_*^{S^1}(\mathcal{B}_0^\sigma(Y); \mathbb{F})$, 同构于 $\mathbb{F}[U, U^{-1}]/\mathbb{F}[U]$, 是一个无穷长的单链, 称为 “tower”, 序列最底部非平凡同调群的次数是同调配边的不变量, 再除以 2 就得到了满同态 $\delta: \Theta_3 \rightarrow \mathbb{Z}$, 且 $\delta(Y) \equiv \mu(Y) \pmod{2}$. 然而, 这里的链复形不是拓扑不变量, 它依赖于度量 g 的选取. 事实上这里的 δ 不是 μ 在 \mathbb{Z} 上的提升.

尽管 S^1 等变的 Monopole Floer 同调没能带来我们需要的不变量, 但若考虑 $\text{Pin}(2)$ 作用, Seiberg-Witten 方程将显示更多的对称性, 带来我们所需的不变量.

$\text{Pin}(2) := S^1 \cup jS^1 \subset \mathbb{C} \cup j\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$, 在 $\mathcal{B}_0(Y)$ 上的作用定义为: S^1 在 \mathbb{C}^2 上作复数乘法, 而 j 作用在 $(v_1, v_2) \in \mathbb{C}^2$ 上得到 $(-v_2, -v_1)$, 且 $j \cdot (a, \phi) := (-a, \phi j)$

类似 S^1 -等变情况的结论, $H_*^{\text{Pin}(2)}(\mathcal{B}_0^\sigma(Y); \mathbb{F}) := H_*(\mathcal{B}_0^\sigma(Y) \times_{\text{Pin}(2)} E\text{Pin}(2); \mathbb{F})$, $\widetilde{HS} = H_*^{\text{Pin}(2)}(\mathcal{B}_0^\sigma(Y); \mathbb{F})$, 进而还能得到 $\widehat{HS}, \overline{HS}$. 为了避免重复, 在下一部分我们将正式证明 (利用 Leray 谱序列) $H_{\text{Pin}(2)}^*(pt; \mathbb{F}) = H^*(B\text{Pin}(2); \mathbb{F}) \cong \mathbb{F}[v, q]/(q^3)$, 这里 $\deg(v) = -4, \deg(q) = -1$. 故 \widetilde{HS} 是 $\mathcal{R} = \mathbb{F}[v, q]/(q^3)$ 上的模.

在这里我们有 Gysin 序列将两种 Monopole Floer 同调关联在一起: 在 \widetilde{HM} 上, 将 v 视作 U^2 , q 视作 0 映射, 则有

$$\dots \rightarrow \widetilde{HS}(Y) \xrightarrow{q} \widetilde{HS}(Y) \rightarrow \widetilde{HM}(Y) \rightarrow \widetilde{HS}(Y) \rightarrow \dots$$

是 \mathcal{R} 上的分次模序列.

作为 $\mathbb{F}[v]$ 模, $\widetilde{HS}(Y)$ 上有 3 个无穷长 tower, 彼此以乘 q 联系, 它们的最低次非平凡同调群的次数与 $\mu(Y)$ 直接相关. 设三条序列的最低次非平凡同调群的次数为 A, B, C , 则 $\alpha = \frac{A}{2}, \beta = \frac{B-1}{2}, \gamma = \frac{C-2}{2}$ 是 Y 的不变量, 满足 $\alpha \geq \beta \geq \gamma$, 且 $\equiv \mu(Y) \pmod{2}$, 还是同调配边不变量, 即可视作 $\Theta_3 \rightarrow \mathbb{Z}$ 的映射, 更多地, 它们还满足 $\alpha(-Y) = -\gamma(Y), \beta(-Y) = -\beta(Y), \gamma(-Y) = -\alpha(Y)$, 具体的证明将在下一部分展示.

6.3 Manolescu 的构造方式

Manolescu 采取 Furuta 的“有限维逼近”的方法给出的, 将有限维的 Morse 理论应用到无限维, 有限维逼近的过程是“一致收敛”的, 于是这种方法奏效的.

前面的构造过程与 Kronheimer and Mrowka 的方式一致, 这里我们从 Seiberg-Witten 方程构建完成之后讲起:

6.3.1 Coulomb gauge 上的 Seiberg-Witten 方程

定义 (global) 库伦切片 (Coulomb slice)

$$V := \ker(d^*) \oplus \Gamma(S) \subset \mathcal{C}(Y, \mathfrak{s})$$

\mathfrak{s} 为同调球 Y 上唯一的 $spin^c$ 结构, $d^* : \Omega^k(Y) \rightarrow \Omega^{k-1}(Y)$ 为余微分算子, 它与 Hodge star 算子以及外微分算子的关系为 $d^*\omega = (-1)^{n(k+1)+1} * d * \omega$.

我们可以将 V 视作“归一化的规范群” $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$ 作用的商空间,

$$\mathcal{G}_0 = \{u : Y \rightarrow S^1 \mid u = e^\xi, \xi : Y \rightarrow i\mathbb{R}, \int_Y \xi = 0\}$$

由于 Y 是整同调球, 有 Hodge 分解

$$\Omega^1(Y) = \ker(d) \oplus \ker(d^*)$$

取定 $(a, \phi) \in V$, 令 $\pi_V : T_{(a, \phi)}\mathcal{C}(Y, \mathfrak{s}) \rightarrow V$ 为线性投射, 使得投射的核切于 \mathcal{G}_0 轨道. 记 $T\mathcal{G}_0$ 为 \mathcal{G}_0 轨道的切空间, 即得 $\ker \pi_V \subset T\mathcal{G}_0$

回顾之前定义的 Seiberg-Witten 方程

$$\widetilde{SW}(a, \phi) = \begin{cases} *da - 2\rho^{-1}(\phi \otimes \phi^*)_0 = 0, \\ \not{D}\phi + \rho(a)\phi \end{cases}$$

现今 $SW := \pi_V \circ \widetilde{SW} : V \rightarrow V$

利用 S^1 作用 $e^{i\theta} : (a, \phi) \mapsto (a, e^{i\theta}\phi)$, 我们就得到了双射

$$\{\widetilde{SW}\text{决定的流线}\}/\mathcal{G} \xrightarrow{1:1} \{SW\text{决定的流线}\}/S^1$$

再令 $\pi^{elc} : T_{(a,\phi)}\mathcal{C}(Y, \mathfrak{s}) \rightarrow T^\perp\mathcal{G}_0$, 有 $\ker \pi^{elc} \subset T\mathcal{G}_0$, 称 π^{elc} 的像为扩展的局部库伦切片 K^{elc} , 为 \mathcal{G}_0 轨道的正交补空间.

在库伦切片 V 上, SW 方程可以写作 1 线性部分和 1 连续部分之和

$$SW = l + c$$

$l, c : V \rightarrow V$ 定义为

$$l(a, \phi) = (*da, \not\partial\phi) \quad (5)$$

$$c(a, \phi) = \pi_V \circ (-2\rho^{-1}(\phi \otimes \phi^*)_0, \rho(a)\phi) \quad (6)$$

令 $V_{(k)}$ 是 V 的 L_k^2 完备化空间, 其中 $k \gg 0 \in \mathbb{N}$. 这里我们取 $k > 5$, 则 $l : V_{(k)} \rightarrow V_{(k-1)}$ 是线性的, 自对偶的, Fredholm 算子, 而 $c : V_{(k)} \rightarrow V_{(k-1)}$ 是紧算子.

下面是适用于库伦规范 (Coulomb gauge) 的 Seiberg-Witten 方程的紧致性定理

定理 10. 取定 $k > 5$, 则存在 $R > 0$, 使得 SW 的所有临界点和临界点之间的流线都包含于球体 $B(R) \subset V_{(k)}$.

6.3.2 有限维逼近

Seiberg-Witten Floer homology 类似于 SW 在 V 上的 Morse 同调. 然而, 相较于找一个 Seiberg-Witten 方程上的一般性的扰动来实现横截性条件, 采用有限维逼近的方法更便利.

在前面的构造中, V 是一个无穷维的空间, 它的有限维逼近为

$$V_\lambda^\mu = \bigoplus_{\lambda < \zeta < \mu} V(\zeta), \lambda \ll 0 \ll \mu$$

这里 $V(\zeta)$ 是特征值 ζ 的特征空间

进而我们可以将 $SW = l + c$ 替换为

$$l + p_\lambda^\mu c : V_\lambda^\mu \rightarrow V_\lambda^{\mu\mu}$$

这里 $p_\lambda^\mu: V \rightarrow V_\lambda^\mu$ 是 L^2 投射, 故 $SW_\lambda^\mu := l + p_\lambda^\mu c$ 是 V_λ^μ 上的向量场.

对于有限维逼近, 有如下的紧致性定理

定理 11. 存在 $R > 0$, 使得所有的 $\mu \gg 0 \gg \lambda$ 以及所有 SW_λ^μ 在 $B(2R)$ 中的临界点, 所有的 $B(2R)$ 上连接临界点的流线都落在一个更小的球 $B(R)$ 中.

证明的思想是利用在 $B(2R)$ 中, $l + p_\lambda^\mu c$ 一致收敛于 $l + c$, 故可利用上一个定理证明.

6.3.3 Conly index

有限维的情况下, 紧致流形的 Morse 同调恰是通常的同调. 现在我们要处理非紧致的空间 $B(2R) \subset V_\lambda^\mu$, 此时的 Morse 同调是 Conley index 上的同调.

对于取定的 m 维流形 M , 一族流 $\{\phi_t\}$, Conley index 可定义在 $\{\phi_t\}$ 孤立不动点集 S 上.

定义 10. 对于子集 $A \subseteq M$, 定义

$$\text{Inv}A = \{x \in M \mid \phi_t(x) \in A, \forall t \in \mathbb{R}\}$$

定义 11. 若紧致流形 $S \subset M$ 满足 $S = \text{Inv}A \subseteq \text{Int}A$, 其中 A 是 S 的一个紧致邻域, 则称 S 是 M 的孤立不动点集

定义 12. 对于孤立不动点集 S , Conley index $I(S) := N/L$, 其中 $L \subseteq N \subseteq M$, L, N 都是紧致集, 满足

1. $\text{Inv}(N - L) = S \subset \text{Int}(N - L)$
2. $\forall x \in N$, 若 $\exists t > 0$ 使得 $\phi_t(x) \notin N$, 则 $\exists \tau \in [0, t)$ 使得 $\phi_\tau(x) \in L$
3. $x \in L, t > 0, \phi_{[0, t]}(x) \subset N \Rightarrow \phi_{[0, t]}(x) \subset L$

也就是说, 所有 N 中自内而外流出的流线, 必经过 L .

现在, 我们取 $A = B(2R)$, 则 $S = \text{Inv}A$, 由前面的定理可知, S 就是其中所有孤立点和流线的并集. 接着, N 可以取为一个带边流形, $L \subset \partial N$ 是 ∂N 中余 0 维的子流形, 故 L 自身也有边界.

可以证明, 若流线满足 Morse-Smale 条件, 那么 $B(2R)$ 的 Morse 同调就同构于 $I(S)$ 的简约奇异上同调.

这里 $I_\mu^{\mu'}(l)$ 是 $V_\mu^{\mu'}$ 上线性流 $\dot{x} = -l(x)$ 的 Conley index.

由于 l 在 $V_\mu^{\mu'}$ 上只有正的特征值, 推出

$$I_\mu^{\mu'}(l) = S^{(\text{Morse index})} = S^0$$

故 $I_\lambda^{\mu'} = I_\lambda^\mu$, $\mu, \mu' \gg 0$.

另一方面, 当变化负特征值的界限 λ 时, Conley index 为

$$I_{\lambda'}^\mu = I_\lambda^\mu \wedge I_{\lambda'}^\lambda(l)$$

其中 $I_{\lambda'}^\lambda(l) = S^{|\lambda - \lambda'|}$ 因此偏移量就是 V_λ^0 的维数, 即

$$\tilde{H}_{*+\dim V_\lambda^0}^{S^1}(I_\lambda^\mu)$$

当 $\mu \gg 0 \gg \lambda$ 时, 它与 λ, μ 的取值无关. 取 $\text{Pin}(2)$ 时的结论是相同的.

为了说明 $SWFH$ 是一个拓扑不变量, 我们还应该证明它与黎曼度量 g 的选取无关. 取定 μ, λ , 当 g 扰动时, 如从 g_0 连续变化为 g_1, V_λ^0 的维数不发生改变, 然而, V_λ^0 的维数可能会发生改变, 这个改变由线性算子 l 的“谱流 (spectral flow)”决定, 即带符号地计数随 g 变化时越过零点的特征值个数.

对于线性部分 $l = (*d, \phi)$, 由于 $H^1 = 0$, 故 $*d$ 没有零特征值. 然而 ϕ 有谱流. 选取自旋 4 维流形 W , 以 (Y, g) 为边界, 然后在边界上添加一个圆柱形边缘, 即 $W^4 \cup_Y Y \times [0, 1]$ 则 ϕ 的谱流由下面的公式决定

$$\begin{aligned} SF(\phi) &= n(Y, g_0) - n(Y, g_1) \\ &= 2 \text{index}(\phi) \text{ on } Y \times [0, 1] \end{aligned}$$

这里 $\text{index}(\phi) = \ker \phi - \text{coker} \phi$ 表示 ϕ 的 Atiyah-Singer index.

$$n(Y, g) = -2 \left(\text{index}_{\mathbb{C}}(\not{D}_W) + \frac{\sigma(W)}{8} \right) \in 2\mathbb{Z}$$

故 $n(Y, g) \equiv 2\mu \pmod{4}$

这样我们最终得到了

$$SWFH_*^{S^1}(Y) := \tilde{H}_{*+\dim V_\lambda^0 - n(Y, g)}^{S^1}(I_\lambda^\mu)$$

以及

$$SWFH_*^{\text{Pin}(2)}(Y; \mathbb{F}) := \tilde{H}_{*+\dim V_\lambda^0 - n(Y, g)}^{\text{Pin}(2)}(I_\lambda^\mu; \mathbb{F})$$

是 Y 的拓扑不变量.

类似地也可以构造推广的同调论, 比如 K -理论的 $K_*^{\text{Pin}(2)}$, 或者 Borel 同调 \tilde{H}_*^G, G 取为任意的 $\text{Pin}(2)$ 的子群.

6.3.6 Seiberg-Witten Floer 稳定同伦型

事实上, 以上的构造还可以得到一个比同调群更强的不变量, 即 $\text{Pin}(2)$ 等变的稳定同伦型 SWF . 我们后面会说明它与 $SWFH$ 的关系.

定义 13. 不要求等变, 一个 *suspension* 谱是 (X, n) , 其中 X 是拓扑空间, $n \in \mathbb{Z}$. 我们认为 (X, n) 是 X 形式上 *de-suspension* n 次, 即

$$(X, n) = \Sigma^{-n} X$$

而 X 的 n 次 suspension 为

$$\Sigma^n X = S^n \wedge X.$$

令 $[X, Y]$ 表示有向映射的同伦类, 则我们可以定义一个范畴, 它的对象和态射为

$$\begin{aligned} \text{Obj} &= (X, n) \\ \text{Mor} &= [(X, n), (Y, m)] = \begin{cases} \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ N-n \in \mathbb{Z}}} [\Sigma^{N-n} X, \Sigma^{N-n} Y], & m - n \in \mathbb{Z} \\ 0 & m - n \notin \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

我们可以类似地定义 $\text{Pin}(2)$ 等变的 suspension 谱.

由于 $\text{Pin}(2)$ 可以视作两个对称的 S^1 通过反射 j 联系, 因此它有如下的不可约表示

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \quad \text{平凡作用} \\ \tilde{\mathbb{R}} \quad \left\{ \begin{array}{l} j \quad \text{乘 } -1 \text{ 作用} \\ S^1 \quad \text{平凡作用} \end{array} \right. \\ \mathbb{H} \quad \text{Pin}(2) \text{左乘作用} \end{array} \right.$$

因此 $\text{Pin}(2)$ 等变的 suspension 谱是一个四元组 $(X, n_{\mathbb{R}}, n_{\tilde{\mathbb{R}}}, n_{\mathbb{H}})$

而 V 的有限维逼近可以分解为

$$V_{\lambda}^{\mu} \cong \tilde{\mathbb{R}}^a \oplus \mathbb{H}^b$$

其中 $\tilde{\mathbb{R}}$ 作符号表示的分量, \mathbb{H} 作旋量表示的分量.

因此我们定义 Y 的 Seiberg-Witten Floer 等变谱为

$$SWF(Y) := \Sigma^{\mathbb{H} \frac{n(Y, g)}{4}} \Sigma^{-V_{\lambda}^0} I_{\lambda}^{\mu}$$

其中对于一个群 G 表示的线性空间 V , $\Sigma^V X = X \wedge S^V$, 其中 S^V 表示 V 的一点紧致化, 它上面自然地有一个 G 作用, 故 $\Sigma^V X$ 上也有一个自然的 G 作用.

它满足

$$H^{\text{Pin}(2)}(\text{SWF}(Y); \mathbb{F}) = \text{SWFH}^{\text{Pin}(2)}(Y; \mathbb{F}).$$

6.3.7 同调配边不变量 α, β, γ

我们将利用 $\text{SWFH}^{\text{Pin}(2)}(Y; \mathbb{F})$ 来构造映射 $\beta: \Theta_3^H \rightarrow \mathbb{Z}$, 满足

1. $\beta(-Y) = -\beta(Y)$
2. $\beta(Y) \equiv \mu(Y) \pmod{2}$

在此过程中还将得到另外两个映射 $\alpha, \gamma: \Theta_3^H \rightarrow \mathbb{Z}$

我们在 KM 构造的过程中提到了 Borel 同调群 $H_*^{\text{Pin}(2)}(X)$, 它可以视作上同调环 (为 Borel 上同调) $H_{\text{Pin}(2)}^*(pt) = H^*(B\text{Pin}(2)) \cong \mathbb{F}[v, q]/(q^3)$, 下面我们将给出完整的证明: 对于 $\text{Pin}(2) \subset SU(2)$, 含入映射 i 诱导了纤维化

$$\begin{array}{ccc} \text{Pin}(2) & \xleftarrow{i} & SU(2) \\ & & \downarrow \psi \\ & & \mathbb{R}P^2 \end{array}$$

这里 ψ 是 Hopf 纤维化与 S^2 上对合变换的商映射 (如对径映射). 这个纤维化继续诱导了另一个纤维化:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}P^2 & \hookrightarrow & B\text{Pin}(2) \\ & & \downarrow \\ & & BSU(2) = \mathbb{H}P^\infty \end{array}$$

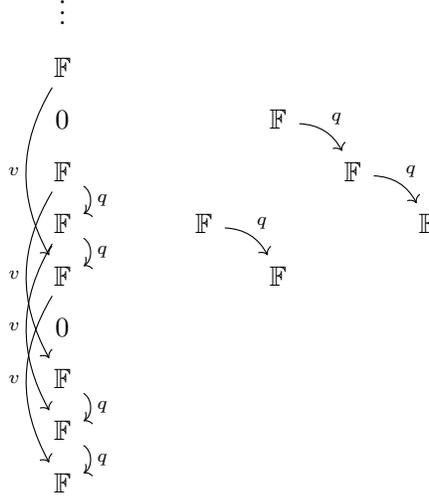
$\mathbb{R}P^2$ 的上同调环由生成元 q 生成, 其作用如图示

$$\mathbb{F} \xrightarrow{q} \mathbb{F} \xrightarrow{q} \mathbb{F}$$

$BSU(2) = \mathbb{H}P^\infty$ 的上同调环由生成元 v 生成, 其作用如图示

$$\mathbb{F} \xrightarrow{v} \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \end{array} \mathbb{F} \xrightarrow{v} \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \end{array} \mathbb{F} \xrightarrow{v} \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \end{array} \mathbb{F} \dots$$

得到了 $SWFH_*^{\text{Pin}(2)}$ 的复形结构, 即 Conley index 的等变胞腔结构, 形式如下:



其中有限的部分可以是任意维的向量空间, 可以通过 v, q 作用连接, 或者 ∂ 连接; 另外存在一条无穷长的同调序列, 由三条无穷长的 v 作用的 tower 构成. 无穷维部分对应 $SWF(Y)$ 的 S^1 作用不动点集, 有限部分对应自由胞腔.

由于 $(SWF(Y))^{S^1} = S^{n(Y,g)}$, 且 $n(Y,g) \equiv 2\mu \pmod{4}$, 可知,

- 从下往上的第一个塔上的所有群的次数为 $2\mu \pmod{4}$
- 第二个塔上的所有群的次数为 $2\mu + 1 \pmod{4}$
- 第三个塔上的所有群的次数为 $2\mu + 2 \pmod{4}$

现在取三个塔的最低次数依次为 $A, B, C \in \mathbb{Z}$, 则可构造

$$\alpha = \frac{A}{2}, \beta = \frac{B-1}{2}, \gamma = \frac{C-2}{2}$$

是 Y 的不变量, 且 $\alpha, \beta, \gamma \equiv \mu \pmod{2}$

此外, 由模的结构 (即 q 不能映 0 元为非 0 元), 必有 $\alpha \geq \beta \geq \gamma$.

接下来我们证明, 它们的确是同调配边不变量.

设 W^4 是一个光滑定向的 $spin(4)$ 配边, $b_1(W) = 0$, 且 $\partial W = (-Y_0) \cup Y_1$ (在我们实际的应用上, 只关心 Y_0, Y_1 是同调球的情况), 考虑 W 上的 SW

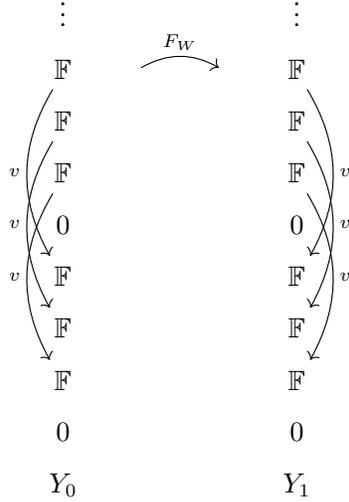
方程, 并且做解空间上的有限维逼近, 我们会得到类似于 3 维时的结论, 最后的结果是, 我们将得到两个 suspension 谱之间的稳定等变映射

$$\Psi_W : \Sigma^{m\mathbb{H}} SWF(Y_0) \rightarrow \Sigma^{n\tilde{\mathbb{R}}} SWF(Y_1)$$

这里 $m\mathbb{H}$ 是 m 个四元数型表示的直积, $n\tilde{\mathbb{R}}$ 表示 n 个符号表示的直积. 并且

$$m = \frac{-\sigma(W)}{9} = \text{index}(\mathcal{D}), \quad n = b_2^+(W) = \text{index}(d^+)$$

现在, 当 W 是同调球 Y_0, Y_1 间的同调配边时, W 上存在唯一的 $spin(4)$ 结构, 且 $b_1(W) = 0, m = n = 0$. 令 F_W 是 $\text{Pin}(2)$ 等变 $SWFH$ 之间的由 Ψ_W 诱导的模同态, 形如



由等变的局部化可知, 当 $k \gg 0$ 时, F_W 是同构, 且 F_W 是一个模映射, 即有交换图表

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F} & \xrightarrow{F_W} & \mathbb{F} \\ \downarrow v & & \downarrow v \\ \mathbb{F} & \xrightarrow{F_W} & \mathbb{F} \end{array}$$

因此, 必然有

$$\begin{aligned} \alpha(Y_1) &\geq \alpha(Y_0) \\ \beta(Y_1) &\geq \beta(Y_0) \\ \gamma(Y_1) &\geq \gamma(Y_0) \end{aligned}$$

由 $SWFH(Y_1)$ 到 $SWFH(Y_0)$ 的模映射, 则可得到另一个方向的不等号, 因此我们有

$$\begin{aligned}\alpha(Y_1) &= \alpha(Y_0) \\ \beta(Y_1) &= \beta(Y_0) \\ \gamma(Y_1) &= \gamma(Y_0)\end{aligned}$$

这就说明了 α, β, γ 是同调配边不变量.

6.3.8 对偶性

到现在我们证明了 β 是一个 mod 2 等于 μ 的同调配边不变量, 距离我们需要的不变量还有一步之遥, 就是它应该满足 $\beta(-Y) = -\beta(Y)$.

为此我们关心 3 维同调球 (Y, g) 定向反转, 变为 $(-Y, g)$ 时导致的拓扑不变量 $SWFH$ 发生的变化. 此时 Sieberg-Witten 方程决定的流线方程发生变化

$$\dot{x} = -SW(x(t)) \rightsquigarrow \dot{x} = SW(x(t))$$

对于 V 的有限维逼近 V_λ^μ , 定向反转前后对应了对构造 Conley index 的空间偶, (N, L_+) 和 (N, L_-) , 使得 N 是 V_λ^μ 的余 0 维子流形, 且

$$L_+ \cup L_- = \partial N, \quad \partial L_+ = \partial L_- = L_+ \cap L_-$$

由于存在嵌入 $X \subset V_\lambda^\mu \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$, 使得

$$X \simeq N/L_+, \quad \mathbb{R}^{d+1} - X \simeq N/L_-$$

再由 Alexander 对偶定理, 就得到了

$$\tilde{H}_*(N/L_+) = \tilde{H}^{d-*}(N/L_-) \quad (7)$$

这里 $d = \dim(V_\lambda^\mu) = \dim(N)$.

然而, 在 G 等变的 $SWFH$ 中, 我们需要一个类似于 7 的结论. 在此之前我们先介绍一个弱一点的稳定同伦版本的对偶同构定理, 称为 Spanier-Whitehead 对偶.

先不要求等变, 考虑一个 suspension 谱, 即拓扑空间 X 的形式上的 suspension:

$$\mathcal{Z} = (X, k) = \Sigma^{-k} X$$

且存在嵌入 $X \hookrightarrow S^N$, $N \gg 0$

定义 14. $\Sigma^{-k} X$ 的 *Spanier-Whitehead* 对偶为

$$D(\Sigma^{-k} X) := \Sigma^k (\Sigma^{-(N-1)} (S^N - X))$$

由定义可知, $D(S^k) = S^{-k} = (S^0, k)$, 且对于 suspension 谱中的两个元素 \mathcal{Z}, \mathcal{W} , D 与 wedge product 和 smash product 是交换的, 即 $D(\mathcal{Z} \vee \mathcal{W}) = D(\mathcal{Z} \vee D(\mathcal{W}))$, $D(\mathcal{Z} \wedge \mathcal{W}) = D(\mathcal{Z}) \wedge D(\mathcal{W})$, 由 Alexander 对偶, 得到

$$\tilde{H}_k(\mathcal{Z}) = \tilde{H}^{-k}(D(\mathcal{Z}))$$

对于等变的情况, 有类似的等变 Spanier-Whitehead 对偶

定义 15. G 是一个李群, X 是 G -空间, W 是 G 的表示, 对于 G 的某个表示 V , 有嵌入映射 $X \hookrightarrow V^+$, 则 $\Sigma^{-W} X$ 上的 *Spanier-Whitehead* 对偶为

$$D(\Sigma^{-W} X) := \Sigma^W (\Sigma^{-V} \Sigma^{\mathbb{R}} (V^+ - X)).$$

对于前面提到的 V_λ^μ 的两个定向相反的 Conley index 空间偶, 它们各自产生 Y 和 $-Y$ 的 Seiberg-Witten Floer 谱, 满足 $\text{Pin}(2)$ 等变的对偶 $D(\text{SWF}(Y)) = \text{SWF}(-Y)$

然而, 对于等变的情况, 对偶空间的 $\text{SWFH } \tilde{H}_*^G(\mathcal{Z})$ 和 $\tilde{H}_G^*(D\mathcal{Z})$ 可能不同构. 这是因为前者的下同调只在正方向有无穷次非平凡分次群, 而后者只在负方向有无穷次非平凡分次群.

为此, 我们需要引入 co-Borel 同调的概念 (而非 Borel 同调的对偶上同调)

定义 16. 等变 *suspension* 谱的 *co-Borel* 同调定义为

$$c\tilde{H}_*^G(\mathcal{Z}) = \tilde{H}_G^{-*}(D\mathcal{Z})$$

这里 $\mathcal{Z} = \Sigma^{-V} X$

Borel 同调和 co-Borel 同调之间由 Tate 同调建立起联系

定义 17. $\mathcal{Z} = \Sigma^{-V} X$ 的 *Tate* 同调为

$$t\tilde{H}_*^G(\mathcal{Z}) = c\tilde{H}_*^G(\widetilde{EG} \wedge \mathcal{Z})$$

这里 \widetilde{EG} 是 EG 的 *unreduced suspension*

Tate 同调的重要性质是

$$t\tilde{H}_*^G(\mathcal{Z}) = 0, \quad \text{若 } G \text{ 在 } \mathcal{Z} \text{ 上自由作用}$$

后面我们会用这个性质来化简 Tate 同调, 只留下 G 作用的不动点上的同调.

另外, Borel, co-Borel, Tate 同调之间满足 Tate-Swan 正合列

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_{n-\dim G}^G(\mathcal{Z}) \rightarrow c\tilde{H}_n^G(\mathcal{Z}) \rightarrow t\tilde{H}_n^G(\mathcal{Z}) \rightarrow \tilde{H}_{n-\dim G-1}^G(\mathcal{Z}) \rightarrow \cdots$$

当 $G = S^1$, $\mathcal{Z} = SWF(Y)$, Y 为同调球时,

$$t\tilde{H}_*^{S^1}(\mathcal{Z}) = t\tilde{H}_*^{S^1}(\mathcal{Z} \text{ 上 } S^1 \text{ 作用的不动点集}) = t\tilde{H}_*^{S^1}(\text{球面}) = \mathbb{Z}[U, U^{-1}]$$

这里 $\deg U = -2$

类似地, 当 $G = \text{Pin}(2)$ 时, 有

$$t\tilde{H}_*^{\text{Pin}(2)}(SWF(Y); \mathbb{F}) = t\tilde{H}_*^{\text{Pin}(2)}(S^1 \text{ 作用的不动点集}; \mathbb{F}) = t\tilde{H}_*^{\text{Pin}(2)}(\text{球面}) = \mathbb{F}[q, v, v^{-1}]/(q^3)$$

回顾 co-Borel 同调的定义, 以及 $D(SWF(Y)) = SWF(-Y)$, 我们有 $c\tilde{H}_*^{\text{Pin}(2)}(SWF(Y); \mathbb{F}) = \tilde{H}_{\text{Pin}(2)}^{-*}(SWF(-Y); \mathbb{F})$, 将其放入 Tate-Swan 正合列中, 就得到了

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \tilde{H}_{n-2}^{\text{Pin}(2)}(SWF(Y); \mathbb{F}) &\rightarrow \tilde{H}_{\text{Pin}(2)}^{-n}(SWF(-Y); \mathbb{F}) \rightarrow \\ t\tilde{H}_n^{\text{Pin}(2)}(SWF(Y); \mathbb{F}) &\rightarrow \tilde{H}_{n-3}^{\text{Pin}(2)}(SWF(Y); \mathbb{F}) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

因此, $SWFH(Y)$ 中从下而上的第 1 个塔中次数为 $n-2$ 的元素, 对应 $SWFH(-Y)$ 的上同调的从上而下的第 3 个塔中次数为 $-n$ 的元素, 进而对应 $SWFH(-Y)$ 从下而上的第 3 个塔中次数为 $-n$ 的元素. 同理, $SWFH(Y)$ 中从下而上的第 2 个塔, 对应 $SWFH(-Y)$ 从下而上的第 2 个塔, 对应元素的次数由 $n-2$ 变为 $-n$; $SWFH(Y)$ 中从下而上的第 3 个塔, 对应 $SWFH(-Y)$ 从下而上的第 1 个塔, 对应元素的次数由 $n-2$ 变为 $-n$.

因此我们就得到了

$$\gamma(-Y) = -\alpha(Y)$$

$$\beta(-Y) = -\beta(Y)$$

$$\alpha(-Y) = -\gamma(Y)$$

7 4 维拓扑及规范场论的应用

2 维拓扑闭流形的可以通过三角剖分和计算同调群实现完全的分类；3 维拓扑闭流形上有唯一的光滑结构，在上世纪 80 年代，Thurston 提出几何化猜想，直到 21 世纪初被 Perelman 证明，也能实现几何上的分类。

然而，4 维闭流形的分类更为困难。一方面有很多 4 维拓扑流形不存在光滑结构，另一方面，即便是在光滑范畴下，也无法实现分类。

定理 12 (Markov[Mar58]). 不存在一种能够区分两个 4 维闭流形是否光滑同胚的算法。

这是因为 4 维光滑流形 X^4 的基本群 $\pi_1(X)$ 可以实现为任意的有限展示群 $G = \langle S | R \rangle$, S 为生成元集, R 为关系集。然而, Adyan 和 Rubin 在 1955 年证明了不存在确定一个有限展示群是否是平凡群的算法, 因此无法实现有限展示群的分类, 也就无法实现 4 维光滑流形的分类。

如果我们回避基本群的复杂性造成的分类障碍, 比如考虑单连通的流形, 即所有基本群平凡 $\pi_1 = 0$ 的流形, 就能得到很丰富的结论。

对于闭的单连通定向 4 维流形 X , 它的 $H_0 = \mathbb{Z}$, $\pi_1 = 0$, 由 Hurewicz 定理, 得到 $H_1 = 0$, 再由万有系数定理和 Poincaré 对偶, 可知 $H_4 = \mathbb{Z}$, $H_3 = 0$, $H_2 = \mathbb{Z}^b$, $b \geq 0$ 。

因此, 借助 H_2 生成元的对偶配对, 我们可以定义一个对称的双线性的“相交形式”

$$Q_X : \mathbb{Z}^b \times \mathbb{Z}^b \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$(\xi, \eta) \mapsto \langle \xi, D(\eta) \rangle$$

其中 $D : H_2(X) \rightarrow H^2(X)$ 是 Poincaré 对偶同构。

由对偶配对性, 可知 Q_X 的矩阵行列式是 ± 1 。即 Q_X 是一个幺模。

早在四五十年代, 数学家就证明了相交形式能实现 4 维流形在同伦意义下的分类

定理 13. 令 X 是闭的单连通定向 4 维流形, 则相交形式 Q_X 决定了 X 的同伦型。

接下来我们希望了解哪些幺模对称二次型能够实现为某个拓扑 4 维流形或光滑 4 维流形的相交形式。

线性代数的二次型理论告诉我们,在 \mathbb{R} 上, Q_X 合同为 $m\langle 1 \rangle \oplus n\langle -1 \rangle$, 记 $b_2^+(X) = m, b_2^-(X) = n$, 即正负惯性指数, 那么相交形式的符号差 $\sigma(X) = b_2^+(X) - b_2^-(X)$, 显然欧拉示性数 $\chi(X) = 2 + b_2(X) = 2 + b_2^+(X) + b_2^-(X)$

在 \mathbb{Z} 上, 对称么模双线性型即可被分为“定型”(正定 $m = 0$ 或负定 $n = 0$) 与“不定型”($m, n > 0$), 也可被分为偶型与奇型。若 $\forall x \in \mathbb{Z}, Q_X(x, x)$ 是偶数, 则称 Q_X 是偶型, 否则称为奇型。

不定型在代数上有完全的分类。奇不定型合同于 $m\langle 1 \rangle \oplus n\langle -1 \rangle, m, n > 0$, 偶不定型形如 $p \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus qE_8, p > 0, q \in \mathbb{Z}$

这里 E_8 的矩阵可以记作

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

然而, 定型的么模双线性型没有直接的分类。像 $n\langle 1 \rangle$ 是可对角化的例子, $E_8, E_8 \oplus E_8, D_{16}^+, \text{Leech lattice}$ 等是不可对角化的例子。

另一个代数上的结果是, 如果 Q_X 是偶型, 那么它的符号差一定被 8 整除。第一个对相交形式做限制的非平凡的重要定理, 是 Rokhlin 在 1952 年给出的

定理 14. 若 X 是一个闭的, 自旋光滑 4 维流形 (例如单连通且 Q_X 是偶型的流形), 那么 X 的符号差被 16 整除。

由这个定理立马就得到一个推论: 由于 E_8 的符号差是 8, 因此 E_8 不能实现为某个闭的单连通定向光滑 4 维流形的相交形式。

由于定理给的是一个必要条件, 我们不能用它来判断 $E_8 \oplus E_8$ 能否实现为某个光滑 4 维流形的相交形式。

事实上, 相交形式不仅能实现同伦分类, 如定理 13; Freedman 在 1982 年给出了一系列更强的结论:

定理 15 (Freedman[Fre82]). • 对任意的么模对称双线性型 Q , 存在一个单连通的闭拓扑 4 维流形 X , 使得 $Q_X \cong Q$;

- 若 Q 是偶形式, 则相应的流形 X 在同胚意义下是唯一的;
- 若 Q 是奇形式, 则恰好有两个相应同胚型, 且至多有一个是可光滑化的。

这不但说明了所有么模对称二次型都可实现为某个单连通闭 4 维流形的相交形式, 还给出了它们的分类。

例如, 存在 4 维单连通闭流形 M_{E_8} , 相交形式是 E_8 , 由 Rokhlin 定理, 它就不存在光滑结构。

再例如, 光滑流形 $\mathbb{C}P^2$ 的相交形式是奇型 $\langle 1 \rangle$, 因此存在一个“伪” 2 维复射影平面, 记作 $*\mathbb{C}P^2$, 它是不存在光滑结构的, 与 $\mathbb{C}P^2$ 不同胚。由定理 13 可知, 它同伦等价于 $\mathbb{C}P^2$ 。

由于 4 维同伦球的相交形式平凡, 是偶形式, 因此 Freedman 的定理直接推得了 4 维的拓扑 Poincaré 猜想: 4 维同伦球同胚于 4 维球面。

从 1970 年代开始, 数学家们在 4 维拓扑的研究中引入了规范场论的工具, 其中 Donaldson 在 1983 年给出了一个震惊数学界的应用, 即 Donaldson 的可对角化定理:

定理 16 (Donaldson[Don83]). 若闭的光滑单连通的 4 维流形的相交形式 Q_X 是定型, 那么 $Q_X \cong n\langle 1 \rangle$, $n \in \mathbb{Z}$ 。

通过这个定理, 我们不但能说明 E_8 不能实现为光滑 4 维流形的相交形式, 还能说明 $E_8 \oplus E_8$ 也不能。即 $M_{E_8} \# M_{E_8}$ 不存在光滑结构。

另一个 4 维拓扑的重要结论是 \mathbb{R}^4 上存在怪异的光滑结构。一种构造方式是取 $X = \mathbb{C}P^2 \# \overline{9\mathbb{C}P^2}$, 则 $Q_X = \langle 1 \rangle \oplus 9\langle -1 \rangle = (-E_8) \oplus \langle -1 \rangle \oplus \langle 1 \rangle$, 取 α 作为最后一个 $\langle 1 \rangle$ 的生成元, 由 Freedman 的定理可知存在 $\Sigma \cong S^2$ 代表 α , 且由 Donaldson 的可对角化定理, $\Sigma \cong S^2$ 不是光滑的 (否则 $(-E_8) \oplus \langle 1 \rangle$ 不可对角化, 但它表示的流形也是光滑的, 矛盾)。取 U 是 Σ 的邻域, 则 U 可嵌入 $\mathbb{C}P^2$, 于是 $\mathbb{C}P^2 \setminus \Sigma \cong B^4$, 同胚但不微分同胚于 \mathbb{R}^4

基于这种想法, Gompf 证明了 \mathbb{R}^4 由无穷多种光滑结构 [Gom85], Taubes 证明了是不可数无穷 [Tau87]。

8 Poincaré 猜想

最后我们介绍一下 Poincaré 猜想. 这是推动着几何拓扑学发展的另一个非常重要的问题. 它的研究路径和三角剖分猜想类似, 也是分范畴、分维数进行的; 有意思的是, 3 维三角剖分问题很早解决了, 而 3 维 Poincaré 猜想在本世纪才由 Perelman 解决; 光滑的三角剖分问题很早被证明了, 但光滑 Poincaré 猜想还悬而未决, 即不同维度上怪球的存在性问题, 尤其 4 维怪球的存在性, 是高度开放的问题.

在 1904 年, Poincaré 提出猜想:

猜想 4 (Poincaré 猜想). 设 M 是一个闭的三维流形. 若 M 是单连通的, 则 M 同胚于 S^3 .

一个世纪以来, 这个猜想悬而未决. 但人们转而研究 Poincaré 猜想在其它维数的类比, 即广义 Poincaré 猜想. 这在 $n \geq 4$ 时都是正确的.

定理 17 (广义 Poincaré 猜想). 设 M 是闭的 n 维流形, 若 M 同伦等价于 S^n , 则 M 同胚于 S^n .

由于一个闭的三维流形是单连通的当且仅当其同伦等价于 S^3 (我们在本节末尾给一个简短的证明), 广义 Poincaré 猜想在 $n = 3$ 时就是原始的 Poincaré 猜想.

1. $n = 1$ 时, 正确, 因为闭曲线一定同胚于 S^1 ;
2. $n = 2$ 时, 正确, 由闭曲面分类定理, 单连通的闭曲面一定是 S^2 ;
3. $n = 3$ 时, 正确, 2003 年, Perelman 利用 Ricci flow 证明了 Thurston 的几何化猜想 (即任何三维闭流形均可沿二维球面分解成若干块, 每块赋予八中齐性几何结构之一; 由于单连通的闭流形不可分解, 只能具有球面几何, 即 S^3), 从而解决了 Poincaré 猜想;
4. $n = 4$ 时, 正确, 1982 年, Freedman 发展了 4 维流形的拓扑 h-配边理论, 结合 4 维流形的相交形式的结论, 可以给出证明; (光滑 h 配边理论只能用在 $n \geq 5$)
5. $n \geq 5$ 时, 正确, 1961 年 Smale 利用 h-配边理论给出了证明, 不过其中 $n = 5$ 时需要利用 Freedman 的拓扑 h-配边理论.

猜想 5 (光滑 Poincaré 猜想). 设 M 是闭的 n 维流形, 若 M 同伦等价于 S^n , 则 M 微分同胚于 S^n .

关于光滑 Poincaré 猜想的综述, 可以参考王国楨的文章 [WX17].

在足够高的维数上, 奇数维的球面都存在怪异的光滑结构, 即: 有唯一光滑结构的奇数维球面只有 S^1, S^3, S^5, S^{61} .

偶数有超过一半的维数被证明存在怪球; 剩余的偶数维人们也猜想是存在的 [BMQ23].

且有猜想:

猜想 6. 对于大于 4 维的球面, 有唯一光滑结构的只有 $S^5, S^6, S^{12}, S^{56}, S^{61}$.

目前怪球论的研究进展很快, 人们相信这个猜想是正确的.

对于 4 维怪球的存在性问题, 虽然是高度开放的, 人们也倾向于认为 4 维怪球是存在的. 因为我们已经发现了 4 维空间存在“狂野”的性质: 比方说 \mathbb{R}^4 有无穷个互不微分同胚的光滑结构.

猜想 7 (P.L. Poincaré 猜想). 设 M 是闭的 n 维流形, 若 M 同伦等价于 S^n , 则 $MP.L.$ 同胚于 S^n .

P.L.Poincaré 猜想除了 4 维都被解决了, 即 $n \neq 5$ 时的 P.L. Poincaré 猜想均正确 [Buo0s]. 由于 $n \leq 6$ 光滑结构与 P.L. 结构等价, 4 维的 P.L.Poincaré 猜想就相当于 4 维怪球的存在性问题.

命题 1. M^3 是闭的三维流形, 则 M 是单连通的 $\iff M$ 同伦等价于 S^3 .

证明. \Leftarrow : $\pi_1(M) = \pi_1(S^3) = 0$, 故 M 单连通;

\Rightarrow : 若 M 单连通, 则它的连通定向覆盖是平凡覆盖, 也就是说 M 为定向流形, 故 $H_3(M) = 0$; 另外由于 $H_1(M)$ 是 $\pi_1(M)$ 的交换化, 故 $\pi_1(M) = 0$ 推出 $H_1(M) = 0$, 再由万有系数定理, $H^1(M) = 0$, 再由 Poincaré 对偶, $H_2(M) \cong H^1(M) = 0$, 再由 Hurewicz 定理, $\pi_2(M) \cong H_2(M) = 0$, 进而 $\pi_3(M) \cong H_3(M) \cong \mathbb{Z}$. 这意味着 $\pi_3(M)$ 的一个生成元可以由映射度为 1 的映射 $S^3 \rightarrow M$ 决定, 诱导了 H_3 与 π_3 的同构. 进而存在一个由 S^3 到 M 的单连通单纯复形的映射, 诱导了所有同调群的同构, 再由 Whitehead 定理, 可知这个映射是同伦等价的. \square

命题的必要性的思路来自于 [Hat04].

参考文献

- [ARC96] M. A. Armstrong, C. P. Rourke, and G. E. Cooke. *The Princeton notes on the Hauptvermutung*, pages 105–106. Springer Netherlands, Dordrecht, 1996.
- [BMQ23] Mark Behrens, Mark Mahowald, and J D Quigley. The 2–primary hurewicz image of tmf . *Geometry & Topology*, 27(7):2763–2831, September 2023.
- [Buo0s] Sandro Buoncrisiano. Fragments of geometric topology from the sixties. *Geometry & Topology Publications*, 1960s.
- [Cai35] S. S. Cairns. Triangulation of the manifold of class one. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 41(8):549 – 552, 1935.
- [Don83] Simon K Donaldson. An application of gauge theory to four-dimensional topology. *Journal of Differential Geometry*, 18(2):279–315, 1983.
- [Fre82] Michael H. Freedman. The topology of four-dimensional manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 17:357–453, 1982.
- [Gom85] Robert Ernest Gompf. *An Infinite Set of Exotic R^4 's*. Mathematical Sciences Research Institute, 1985.
- [GS79] D. Galewski and R. Stern. A universal 5-manifold with respect to simplicial triangulations. In JAMES C. CANTRELL, editor, *Geometric Topology*, pages 345–350. Academic Press, 1979.
- [GS80] David E. Galewski and Ronald J. Stern. Classification of simplicial triangulations of topological manifolds. *Annals of Mathematics*, 111:1, 1980.
- [Hat04] Allen Hatcher. The classification of 3-manifolds —a brief overview. 2004.
- [KM07] Peter Kronheimer and Tomasz Mrowka. *Monopoles and Three-Manifolds*. New Mathematical Monographs. Cambridge University Press, 2007.

- [KS77] ROBION C. KIRBY and LAURENCE C. SIEBENMANN. *Foundational Essays on Topological Manifolds, Smoothings, and Triangulations. (AM-88)*. Princeton University Press, 1977.
- [Lin16] Francesco Lin. Lectures on monopole floor homology, 2016.
- [Lin17] Francesco Lin. The surgery exact triangle in $\text{pin}(2)$ -monopole floor homology. *Algebraic & Geometric Topology*, 17(5):2915–2960, September 2017.
- [Man15] Ciprian Manolescu. $\text{Pin}(2)$ -equivariant seiberg-witten floor homology and the triangulation conjecture, 2015.
- [Man24] Ciprian Manolescu. Lectures on the triangulation conjecture, 2024.
- [Mar58] Andrei Andreevich Markov. The insolubility of the problem of homeomorphy. In *Doklady Akademii Nauk*, volume 121, pages 218–220. Russian Academy of Sciences, 1958.
- [Mat76] T. Matumoto. Triangulation of manifolds. In *Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976), Part*, volume 2, pages 3–6. 1976.
- [Mil11] John W. Milnor. Differential topology forty-six years later. *Notices of the American Mathematical Society*, 58:804–809, 2011.
- [Tau87] Clifford Henry Taubes. Gauge theory on asymptotically periodic $\{4\}$ -manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 25(3):363–430, 1987.
- [Whi40] J. H. C. Whitehead. On c_1 -complexes. *Annals of Mathematics*, 41(4):809–824, 1940.
- [WX17] Guozhen Wang and Zhouli Xu. The triviality of the 61-stem in the stable homotopy groups of spheres, 2017.